第4章 モデルの定式化

Count what is countable, measure what is measurable, and
what is not measurable, make measurable.
Galileo Galilei(1564-1642)

4.1. モデルの定式化の一般論

問題を数理計画法モデルで解決する場合、次の主な 5 ステップがあります。

①現実の問題を理解する。
②問題を定式化する。
③モデルのための入力データを収集生成する。例えば使用する 1 単位当りの費用。
④モデルを解く。
⑤解を現実の世界に組み入れ解釈する。

一般的には、5 つのステップに対して数回の繰り返しが必要です。最初から、もっとも適切なモデルは作成できません。上の中で最も簡単なのは、コンピュータによるモデルの解法です。これが本質的に簡単であるからではなく、数学的な分析を最も受け入れやすいからです。ステップ①、③,⑤は難しいものではありませんが、少なくとも時間を要します。これらのステップで成功するには、対象の問題に対する深い知識が必要です。特に、ステップ②には最も熟練を必要とします。

良いモデルを定式化することは、科学における 1 つの芸術です。なぜなら、これはつねに現実世界への接近を含んでいるからです。芸術的能力とは、現実への良い接近であるような簡単なモデルを作成することです。私たちは、モデルによる良い接近のため、いくつかの問題の分類があることを知るでしょう。

上述のコメントを胸にきざみこんで、これ以降ではモデルの定式化に対する議論に最も多くのページを割きます。つまり、どのような普遍的な真理がステップ③⑤に適用されているかを述べ、ステップ④のアルゴリズムの導入にします。

4.2. モデルの定式化の 2 つの方法

モデルの定式化には、次の 2 つの方法があります。

①コンストラクティブ・アプローチ（分析的手法）
②テンプレート・アプローチ（雛形モデルの利用）

分析的手法は基本的で一般的ですが、経験の少ない初心者は雛形モデルの利用が好ましいです。後者は、缶詰めにしたモデルを利用するアプローチです。このアプローチでは、アプリケーションの標準的な例題が示されます。もしこれらの雛形モデルに似た問題であれば、状況にあわせてこれを修正することで必要なモデルを作成できます。このアプローチの利点は、実際の状況によく合う雛形モデルさえあれば、技術的な能力をあまり必要としないことです。

4.3. 雛形モデル

もし、あなたが自分の出会う新たな問題に対して 1 つの分類の基準を持っているのであれば、あなたのモデル化の能力はより安心と確信を感じるかも知れません。本章では異なった種類の問題についての分類を示します。実際には、大きな現実の問題は一つの分類には属さず、幾つかのモデルの組合せになるでしょう。分類は完全なものではありませんから、どの分類にも属さないモデルに出会ったり、モデルを新規に開発する必要があるかもしれません。

4.3.1. 製品混合問題

これらは、典型的な LP の導入テキストで使われる問題です。実際には、この様な簡単な形式の問題に出会うことはめったにありません。販売可能な製品の集合とこれらの製品を作るための有限な資源の集合があります。各製品に対して、利益貢献率と資源使用率の集合があります。目的関数は、利用可能な資源量以上に資源を使わずに利益を最大化するような製品 (各製品の総計) の配合を見つけることです。条件は、使用可能量以上の資源を使わないことです。

これらの問題はつねに、「ある制約条件以下になるように利益を最大化せよ」という形式になります。

4.3.2. カバーリング、人員配置、分割問題

これらの問題は、製品混合問題を補う（専門用語では双対問題と呼ぶ）ものです。すなわち、「ある制約条件以上になるように費用を最小化せよ」という形式をとります。この問題における変数は、例えば、その日の様々な交代に対して雇われた人数かもしれません。制約は、選ばれた変数の配合がその日の各時間内に必要とされる人数を「カバー」しなければならなりません、という事実から生じてきます。

4.3.3. 配合問題

この種の問題は、食品、飼料、石油産業において発生します。この問題は、例えば、異なった種類の肉やシリアルや穀物や原油などの原料の集まりを、ソーセージやドックフードやガソリンなどのような最終製品に仕上げます。最終製品 1 単位当りの費用が、ある質的制約式（例えば、タンパク質の含有率≧15%）を満足しながら最小化するように配合することです。

4.3.4. 多期計画問題

この問題は、おそらく最も重要な種類の問題の一つです。これらのモデルは、今期なした決定が、将来においてどの決定が妥当であるかを部分的に決定することを考慮しています。各期間に用いられるサブモデルは、製品混合問題や他の種類の問題かもしれません。これらのサブモデルは、原料、最終製品、現金、未払い貸付金などの在庫変数で結ばれます。そして、ある期間から次の期間へ繰り越されます。

4.3.5. ネットワーク、分配、PERT／CPM モデル

ネットワーク型の LP モデルは、グラフやネットワークで簡単に描けるような形式である。したがって、これらは説明や理解が容易である。ネットワーク型の LP は、しばしば生産分配の問題から生じる。いくつかの場所で製品を生産し、それを多くの得意先に分配すようなどんな企業でも、ネットワークに関連

した問題を見つけるだろう。

特別な注目をネットワーク型の LP に払う主な理由は、これらに対して特殊化した解法が存在する。大きな問題で、これらの特殊な解法は、一般的な解法よりも著しく早いかもしれない。

最も簡単なネットワーク問題の 1 つは、ネットワークにおけるある 1 つの点から他の点への最短経路を見つける問題である。この問題の少し違った変形（すなわち、最長経路を見つける）は、プロジェクト管理ツールの PERT (Program Evaluation and Review Technique) や CPM (CriticaLPath Method) で重要な役割を果すことがある。

大企業で、あるプロセスや部門の出力が他のプロセスや部門の入力になるかもしれない。例えば、General Motors 社は、あるプラントでエンジンを作っている。これらのエンジンは、他の得意先に販売されるか、自社の車やトラックに使われるかもしれない。これを「垂直統合」と呼ぶ。垂直統合モデルでは、各中間製品に対して 1 つの制約がある。この制約式（数学的に様々なプロセスで使われた中間製品の総計）は、この製品が他のプロセスで生産した総計を越えることはできない、という基本的な物理法則である。たいてい、利用可能なプロセスの各種類に対して 1 つの決定変数がある。

もし、ある人が自分の見通しを完全経済に広げるならば、考えるべきモデルは、Wassily Leontief(1951) の「投入／産出モデル」に似たものになる。各工業は必要とされる投入製品と、生産される産出製品によって記述される。これらの産出は、今度は他の工業に対する投入になるかもしれない。この問題は、各工業が特定の消費物を満たすように操作すべき水準を決定することである。

4.3.6. ランダムな要素を含んだ多期計画問題

最適化モデルの基本的な仮定の 1 つは、全ての入力データが確実に知られているということである。しかし、ある重要なデータがきわめてランダムに発生するような状況がある。例えば、ある石油会社が、来たる冬に対して燃料油の生産計画の決定をするとき、その燃料油に対する需要は非常にランダムな変数である。しかし、全てのランダム変数に対して確率分布が知られているなら、ランダム要素を除いた最適化問題を（おそらく大きくはなるだろうが）それと等価な決定型の最適化問題に変更するモデリング技術がある。ゲーム理論は、競争状態の分析に関係する。これの最も簡単な形式は、ゲームが 2 人のプレイヤーで構成され、各人は自分たちにとって実現可能な決定の集合を持ってる。各プレイヤーは、他のプレイヤーの選択を知らずに意思決定のための戦略を選択しなければならない。意思決定の後、各プレイヤーは、どの決定の組合せがなされたかによって左右されるペイオフを受け取る。各プレイヤーの最適戦略を決定する問題は、LP で定式化される。

4.3.7. ポートフォリオモデル

最近 10 年間の最適化の重要な応用は、金融投資における有価証券の設計である。簡単にいえば、高い期待利益と低いリスクを実現するため、株などのリスク商品をどのような割合で投資するかということである。この考えのより複雑な応用は、 S&P 500 のような普及したインデックスへの投資である。

4.3.8. ゲーム理論

ゲーム理論は、競争状態の分析を扱う。この最も簡単な形は、ゲームが 2 人のプレイヤーで構成され、各人は自分達にとって実現可能な決定の集合をもっている。各プレイヤーは、他のプレイヤーの選択を

知らずに意思決定のための戦略を選択しなければならない。意思決定の後、各プレイヤーはどの決定の組み合わせをしたかによって左右される利得を受け取る。各プレイヤーの最適戦略を決定する問題は、LP で定式化される。

出会うすべてのモデルが上のカテゴリーの一つに当てはまるわけではない。多くの問題は、上の種類の組み合わせになる。例えば、多期間問題は一つの部分問題が混合や配合問題になるかもしれない。

4.4. 分析的手法によるモデルの定式化

分析的手法によるアプローチは、一組のモデルを全く新しく組み立てるための指針である。このアプローチは、少し分析的な技術を必要とするが、モデルの状況に何らかの規則が適用される。現実の状況に正確に合致する雛形モデルを見つける確率は低い。実際、この 2 つのアプローチの組合せは重要である。分析的手法によるアプローチのため、私達は Sam Savage に感謝し、モデル化の ABC と呼ばれモデル組み立ての次の 3 段階のアプローチを提案する。

① 決定変数（修正可能な決定変数セル）を識別し定義する。決定変数の定義は、測定単位(例えば、トン、時間、等)を含めておこなう。決定変数を推論する一つの方法は、次のような質問をすることである。何がこの問題の解になるのだろうか？例えば、各製品の生産量や、農産物の使用量などである。

②「最適な尺度」をどのようにするかを定義する。すなわち、測定単位を含む決定変数で目的関数を定義する。実行可能な解の空間で、好みか長所(例えば、利益)を測定する。

③ 測定単位を含む決定変数で、制約式を表す。制約式を考える方法は次の通りである。問題の意図した解が与えられたとして、どんな数値点検が解の妥当性を点検するために必要か。

ほとんどの問題の制約式の大半は、「SOURCE=USE（搬入量=搬出量）」制約式で考えることができる。もう一つの共通の種類の制約式は、会計制約式である。時々これらの区別は任意である。次の生産の設定を考慮する。ある商品の①初期在庫、②その商品のいくつを生産するか、③商品の販売量、および④期末在庫、である。「搬入量=搬出量」制約式は次のように表される。

初期在庫+生産量=販売量+期末在庫

期末在庫の定義は、上の制約式から

期末在庫=(初期在庫+生産量)-販売量

になる。実際 2 つの式は数学的に等しい。

これらの考え方を説明するために、次の例を考えよう。

4.4.1. 例題

Deglo 玩具は、子供用の精密ブロックを製造している。Deglo 社は、暗い中でも光るブロックの生産のため、古い製品の在庫を減らす必要がある。古い製品在庫は、19,900 個の 4 つの窪みブロックおよび 29,700 個の 8 つの窪みブロックである。これらの在庫は、マスタービルダーとエンパイアービルダーという 2 つのキットの形で在庫を一掃できる。目的関数は、この 2 つのキットの販売からの収入を最大にすることである。マスタービルダーは$16.95 で販売し、エンパイアービルダーは$24.95 で販売する。マスタービルダーは 40 個の 8 窪みのブロックと 30 個の 4 窪みのブロックで構成される。エンパイアービルダーは 85 個の 8 窪みのブロックと 40 個の 4 窪みのブロックで構成される。これをモデル化してみよ

う。

4.4.2. 例題の定式化

例題は、次のように定式化できる。

① 基本的な決定変数は:

M = マスタービルダーの製造個数

E = エンパイアービルダーの製造個数

② 目的関数は売り上げの最大化(Max=16.95M + 24.95E).

③ 誰かが解 M と E の値を提案すると、次の制約式に代入し検討できる。

4 窪みのブロックの使用数 □ 19,900 ;

8 窪みのブロックの使用数 □ 29,700 ;

記号で表すと次のようになる。

30M + 40E □ 19,900

40M + 85E □ 29,700

LINGO では次のモデルになる。

```
MAX = 16.95 * M + 24.95 * E;
      30 * M   + 40 * E <= 19900;
      40 * M   + 85 * E <= 29700;
```

解は次のとおりである。530 個のマスタービルダーと 100 個のエンタプライズビルダーを作ることになる。

Optimal solution found at step: 0

Objective value: 11478.50

Variable	Value	Reduced Cost
M	530.0000	0.0000000
E	100.0000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	DuaLPrice
1	11478.50	1.000000
2	0.0000000	0.4660526
3	0.0000000	0.7421052E-01

4.5. 費用を正しく選ぶ

目的関数の費用や利益貢献を表す係数を選ぶ際、注意が必要である。多くの会社では、費用データは最適化モデルで必要とされる詳しい水準で利用できないかもしれない。利用できたとしても、「モデルの」費用係数はこのモデルに不適当かもしれない。

基本ルールはかなり簡単である。決定変数の費用係数は、決定変数の変更による総額の変更の率を表すべきである。私達はこの規則に違反する様々な誘惑を議論する。2 つの主要な誘惑は、埋没費用と結合費用である。

4.5.1. 埋没費用対変動費用

埋没費用は、必ずしも支払われていなくても、既に決まっているか約束した費用である。変動費用は活動水準とともに変わる費用である。埋没費用は、決定変数のあらゆる係数で現われるべきでない。埋没費用かどうかは、決定変数の計画対象期間の長さにも密接に左右される。一般ルールは、短期的な場合すべての費用は埋没費用で、長期間の場合すべての費用は変動費用である。次の例で説明する。

埋没費用　対　変動費用の例：

ある会社の製品 X と Y の利益貢献表は次のとおりである。

製品:	X	Y
販売価格/単位	$1000	$1000
材料費/単位	$200	$300
労働費/単位	$495	$300
利益	$305	$400

この 2 製品は、ある共通の組み立て設備を 80 単位使用する。製品 X は 40 単位および Y は 60 単位に制限されている。労働者の時給は$15/時間である。明らかにモデルは次のとおりである。

```
Max = 305 * X + 400 * Y;
      X           <= 40;
              Y <= 60;
      X      + Y <= 80;
```

解は 20 個の X と 60 個の Y を作ることである。$15/時間の労働費で、この解で要求される総労働費用は 20*495/15 + 60*300/15 = 1860/時間である。

次に、上記の状態に可能な追加や変更を加える。ある自動車会社では、例えば、1 年間に一定の従業員に仕事を保証する労働契約がある。労働契約に署名する前に、何人従業員を雇うかを決めるために上のモデルを使用すると、$15/時間の労働費は余りに低いかもしれない。米国では、雇用者は労働手形に 8%に近い社会保障および医療保障税を支払わなければならない。さらに雇用者は従業員の健康保険の費用を支払うので、労働費用は 1 時間あたり$15/時間よりも$20/時間に近くなるかもしれない。

しかし契約が署名されれば、人件費は埋没費用になる。今 1 日あたり労働に 1860 時間使用してもいい制約を有する。利益貢献は次のとおりである。

製品:	X_	Y_
販売価格/単位	$1000	$1000
材料費/単位	$200	$300
総利益	$800	$700

X の方が利益のある製品になった. X を 40 個と Y を 40 個作る前に、労働制約が固定されていることが重要である。短期間の正しいモデルは、次のとおりである。

```
Max = 800 * X + 700 * Y;
      X           <= 40;
              Y <= 60;
      X      + Y <= 80;
```

33 * X + 20 * Y <= 1860;

解は次のとおりである。

Optimal solution found at step: 1

Objective value: 58000.00

Variable	Value	Reduced Cost
X	20.00000	0.0000000
Y	60.00000	0.0000000

Row	Slack or Surplus	DuaLPrice
1	58000.00	1.000000
2	20.00000	0.0000000
3	0.0000000	215.1515
4	0.0000000	0.0000000
5	0.0000000	24.24242

今、競争があるため x の販売価格が$650 に落ちたと仮定する。しかし、1 日あたり 1860 時間の労働契約を有する。これを表す正しいモデルは次のとおりである

```
Max = 450 * X + 700 * Y;
      X         <= 40;
            Y   <= 60;
      X     + Y <= 80;
  33 * X + 20 * Y <= 1860;
```

まだ同じ解（X = 20 と Y = 60)を得る.しかし、モデルを間違って次のようにしたとする。

```
Max = - 45 * X + 400 * Y;
      X         <= 40;
            Y   <= 60;
      X     + Y <= 80;
  33 * X + 20 * Y <= 1860;
```

このモデルは、X を生産しないという間違った解になる.

上記に類似した多くの計画問題がある。例えば、航空会社かトラック運送会社は、毎日の運行計画モデルの決定と同じモデルを長距間の運行決定のために使用するかもしれない。長期間の運行決定モデルの場合、資本費用は車を持つ費用の毎日の費用に含まれているべきである。一方では、短期間の運行決定モデルの場合、資本費用は車の毎日の費用に含まれているべきでない。但し、使用される車の数は、長期計画で選ばれる運行のサイズ以上であってはいけない。短期モデルを解く場合、車の使用量によって変わる操業費用だけが含まれるべきである。

4.5.2. 結合生産

単一プロセスが複数製品を作り出すことを結合生産という（あるいは、一種類の公共財が、異なる種類の複数の便益を産む)。主な特徴はプロセスを動かせば、やむを得ず結合製品のそれぞれの量を得ることである。例は次のとおりである。

プロセス　　　　結合製品
原油の蒸留　　　ガソリン、オイル、燈油、タール
未加工ミルク処理　　　　全ミルク、上澄みのミルク、2%のクリーム、ヨーグルト
肉処理　軽い肉、赤身肉、ステーキ、チャックの焼き肉
半導体製造　　　高速、低速製造する半導体
貴金属の鉱石　　金、銀、銅
訪問販売　　　　種々の製品

税務当局の要請で、費用を出力製品に割振ることを考える。重要な点は、この割振りには明確な目的がないことである。これは避けるべきである。結合生産をモデル化する適切な方法は、各出力製品毎に別々の決定変数を用いることである。そして結合生産のために決定変数を用いることである。費用および収入は関連する決定変数に加える(蒸留費用は蒸留する原油の量を表す決定変数と関連すべきである)。そしてガソリンを作り出したいと思えば制約式で、蒸留の費用を負担しなければならない。

4.5.3.　結合費用例

Chartreuse 社 (CC 社)はカボチャを作っている。カボチャ 1 トンを栽培し、収穫し、えり分けるのに$800 かかる。CC 社は 150 トンのカボチャを植え、収穫する能力がある。遺伝子工学を用いた CC 社の最善の努力にもかかわらず、収穫したカボチャは「よい、優れた、絶妙」の 3 つのクラスに均等に分類される。選別に$100/トンを要する。代わりに、あらゆるクラスのカボチャを付加的な費用なしで破棄できる。価格は最近落ちてしまったので、カボチャのすべての等級を販売することが有益であるかどうかである。3 つの等級のトンごとの現在の販売価格は$700、$1100、 $2200 である。各等級をどれ位処理し、販売すべきであるか。適切なモデルは次のとおりである。

栽培、収穫、選別の費用を 3 つの等級に割振る誘惑的なモデルは次のとおりである。

```
MAX = ( 700 – 100 – 2400/3) * G + (1100 – 100 –
     2400/3) * P + (2200 - 100 – 2400/3) * E ;
G <= .333333 * 150;
P <= .333333 * 150;
E <= .333333 * 150;
```

よいカボチャは、上記のモデルで負の利益なので、作られない。そこで費用を P と E に割振る:

```
MAX = (1100 – 100 – 2400/2) * P + (2200 - 100 –
     2400/2) * E;
G <= .333333 * 150;
P <= .333333 * 150;
E <= .333333 * 150;
```

さて、優れた等級は作り出す価値がない。そこで、全費用を絶妙が負担することにすると、これも負になり作る価値がないことになる。従って、私達は有益な事業を始めたのに、共通経費の割振りの盲目的な使用により、有益な事業をやめた。この物語の教訓は盲目的に原価配分をしないことである。

4.5.4. 帳簿価格　対　市場価格

最適化モデルを定式化する際の問題は、費用が在庫から使われる製品に付けなければならないことである。典型的な会計システムは、在庫製品に帳簿価格を適用する。在庫製品を使用する費用として、すぐに利用できる数字を使う誘惑にかられる。例えば、ガソリン卸売業者が先月 2.77 ドル/ガロンで 10,000 ガロンの普通ガソリンを買ったとする。そして、今月普通ガソリンの在庫を 5,000 ガロンもっている。現在、普通ガソリンの市価は 2.70 ドル/ガロンに落ちた.そこで、今月あなたは、生産と市場活動を熟考している。今月の普通ガソリンの在庫の使用いくらにすれば良いだろう？ある人は、購入が埋没費用なので、費用は 0 であると主張するかもしれない。他の人は、帳簿価格（$2.77/ガロン）を請求しなければならないと主張するかもしれない。どちらが正しいだろう？単純な速答は、意思決定目的のためであれば、税の計算のために法律によって必要な場合を除き、帳簿価格は常に無視するということである。在庫品の価格は 0 であるが、市場でそれを売ることを含み在庫に関してできる可能な全てのオプションを列挙しなければならない。

小さな例で詳細を把握し、利用可能な行動のために決定変数を定義することで問題をはっきりさせるのを助ける。今月、買うか、普通ガソリンを$2.70/ガロンで無制限に売買できる。しかし、買うどんなガソリンでも$0.01/ガロンの輸送と業務費用が必要になる。同じように、ガソリンを売るために 0.02 ドル/ガロンの業務費用がかかる。何を普通ガソリンでできるか？それを直接売るか、高級ガソリンを同量混合し中級ガソリンを作ることである。あなたは現在、最高 6000 ガロンの中級ガソリンに$2.82/gallon を払う気がある 1 人の顧客と、最高 8000 ガロンの中級ガソリンに$2.80/ガロンを払う気がある二番目の顧客がいる。高級なガソリンは、無制限に$2.90/ガロンまで購入できる。次のいずれれを選択すべきか。: 何もしない、市場へ売る、高級ガソリンを購入し中級ガソリンに仕立てて顧客 1 あるいは顧客 2 に売る。最適化の ABC ステップに従い、A で決定変数を定義する : PB=今月市場で購入する普通ガソリンの量、RS=今月市場で直接売った普通ガソリンの量、RB=購入する高級ガソリン、MS1=顧客 1 に売った中級ガソリン、MS2=顧客 2 に売った中級ガソリン。 B ステップは、目的関数は（売り上げ-費用）を最大にすることである。ステップ C は、制約を指定することである。2 つの主な制約は、普通と高級ガソリンの「搬入量＝搬出量」制約である。公式は、下で示される。1 ガロンの中級ガソリンは 0.5 ガロンの普通と高級ガソリンを使う。理解がより簡単になるよう、解の報告の制約に[列名]を与える。

```
!Maximize revenues – costs;
   MAX = (2.70-.02)*RS+(2.82-.02)*MS1+(2.80-.02)*MS2
         - (2.70 + .01)*RB - (2.90 + .01)*PB;
!Sources = uses for Regular and Premium;
  [SEQUR]      5000 + RB = RS + .5*(MS1 + MS2);
  [SEQUP]      PB =        .5*(MS1 + MS2);
!Upper limits on amount we can sell;
  [UL1]               MS1 <= 6000;
  [UL2]               MS2 <= 8000;
```

普通ガソリンの在庫には、明確なチャージはない。2.77 ドルの帳簿価格は、公式化のどこにも現れない。在庫は埋没費用または無料の商品とみなされるが、我々は直接それを売るためにオプションに含めた。例えば、中級ガソリンを混合するために普通ガソリンを使うことは、単に直接普通ガソリンを現在の市

価で売ることと争わなければならない。解は次の通りである。:

Objective value: 13430.00

Variable	Value	Reduced Cost
RS	2000.000	0.000000
MS1	6000.000	0.000000
MS2	0.000	0.015000
RB	0.000	0.030000
PB	3000.000	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	13430.000	1.000000
SEQUR	0.000	-2.680000
SEQUP	0.000	-2.910000
UL1	0.000	0.005000
UL2	8000.000	0.000000

市場へ直接売るよりも、普通と高級ガソリンを混ぜ合わせ中級ガソリンとして顧客 1 に売るほうが利益がある。しかし、市場に普通ガソリンを直接売ることは、顧客 2 に中級ガソリンを売るより利益がある。

4.6. 一般的な誤り

現実問題を最初に定式化するときには、その定式化には間違いや誤りを含んでいるのが一般的である。これらの誤ちは次のように分類される。

①簡単な印刷上の間違い
②基本的な定式化の間違い
③近似上の間違い

最初の 2 つの間違いは、それを発見すれば修正は簡単である。基本的には、種類 1 の間違いは、本質的には事務的な間違いであるので、発見するのも簡単である。しかし、大規模なモデルの場合には、それを追いかけることはかなり困難になる。種類 2 の間違いは、もう少し基本的なものである。なぜなら、これは現実の問題を間違って理解するか、もしくは LP モデルの性質を間違って理解するかのどちらかである。種類 3 の間違いになるとさらに微妙なものとなる。一般的に、現実レベルでの LP モデルは、何らかの近似を伴う。例えば、いくつかの製品は、ひとまとめにしてある単一のマクロ製品として扱ったり、一週間の日数が一括したり、費用が生産量に比例しないのにそれを線形として扱う場合が多い。そこでこの種類 3 の間違いを避けるには、どのような近似ができるかを発見する技術が必要になる。

まず第一の種類の間違いを議論しよう。さらにことがうまく運んだときには、種類 1 のような間違いをすれば途方もない答えがかえってくるので自ずから明らかになる。

定式化の誤ちは、多くの型があるので議論するのはより難しくなる。初心者がよく犯す種類の間違いは、しばしば次元を分析することで発見できる。物理学や化学の科目をとった人ならば、「単位をチェックする」ことで知られている。例題でこれを説明しよう。

あるおもちゃ問屋が近づく休暇シーズンに備えて、あるおもちゃを生産する戦略を分析すとしよう。

この生産者は 2 種類のおもちゃ、「Big」と「Tot」を組み立てている。そして、前者は 1 つの製品を作るのに 60 本の棒と 30 個のコネクターが必要であり、後者の製品は 30 本の棒と 20 個のコネクターが必要である。ここで、重要な考察すべき要因として、この季節に備えて生産者は、60,000 個のコネクターと 93,000 本の棒しかもっていないとしよう。彼はどちらの製品についても、組み立てたならば、それをすべて売却することができる。利益寄与（Cj)は、Big と Tot について、それぞれ 1 単位あたり 5.5 ドルと 3.5 ドルである。彼は利益を最大化するために、それぞれの製品をどれだけ売るべきか？

この定式化として、次の決定変数を考えてみよう。

B＝製品 Big の組み立て個数
T＝製品 Tot の組み立て個数
S＝実際に使われる棒の本数
C＝実際に使われるコネクターの個数

```
MAX = 5.5 * B + 3.5 * T;
B - 30 * C - 60 * S   = 0;
T - 20 * C - 30 * S   = 0;
                 C <= 60000;
                 S <= 93000;
```

最初の 2 つの制約は次の制約と同じである。

B＝30C＋60S
T＝20C＋30S

あなたがこの定式化に同意するのなら、次の解を分析してみよう。

```
Optimal solution found at step:          0
Objective value:                 0.5455500E+08
Variable          Value          Reduced Cost
       B       7380000.            0.0000000
       T       3990000.            0.0000000
       C       60000.00            0.0000000
       S       93000.00            0.0000000
     Row   Slack or Surplus       DuaLPrice
       1     0.5455500E+08          1.000000
       2     0.0000000              5.500000
       3     0.0000000              3.500000
       4     0.0000000              235.0000
       5     0.0000000              435.0000
```

ここで定式化に間違いがあることが明白である。なぜならば、この解によれば、93,000 個の棒しかないのに製品 Tot を 3,990,000 個も生産できることになる。これは LP の初心者がよく犯す間違いである。すなわち、ある行動の特徴を制約式で記述しようとする点である。制約というものは常に、何らかの財の利用量がその財の供給量に等しいか、少ないという記述と考えてよい。したがって、下の 2 つの制約式はこの性質を持っているけれども、上の 2 つはこの性質を持っていない。

そこで、最初の 2 つの制約式の次元を解析すると、おかしな点があることがわかる。そこで最初の制約の次元を考えると明らかにこれらは異なる単位になっている。もし 2 つの項をたし算するときには、それらの単位は同じでなければならない。誰でも知っているように、リンゴの個数とみかんの個数はたしてはいけない。ある制約の中におけるそれぞれの項の単位は等しくなければいけない。

語句	単位
B	製品 Big の個数
30C	30（コネクターの個数／Big の個数）×コネクターの個数
60S	60（棒の本数／Big の個数）×棒の本数

そこで、まず問題を言葉で定式化して、それからそれを代数表現に変換すれば、上記のような間違いを避けることができる。そしてこれを言葉でいうならば、われわれがやりたいことは、

まず利益寄与を最大化することであり、制約は次のようになる。

コネクターの利用量≦コネクターの供給量

棒の利用量≦棒の供給量

これを代数的に表現すれば、次のようになる。

```
MAX = 5.5 * B + 3.5 * T;
      30 * B +   20 * T <= 60000;
      60 * B +   30 * T <= 93000;
```

この制約 30B+20T ≦ 60000 の項の単位を考えるならば次のようになる。

語　句	単　位
30B	30（コネクターの個数／Big の個数）× Big の個数＝ 30 個のコネクター
20T	20（コネクターの個数／Tot の個数）× Tot の個数＝ 20 個のコネクター
60,000	60,000 個のコネクター

ここですべての項の単位はコネクターの個数となる。そしてこの問題を解けば、意味のある解が得られる。

```
Optimal solution found at step:          0
Objective value:                   10550.00
Variable           Value          Reduced Cost
       B         200.0000            0.0000000
       T         2700.000            0.0000000
     Row    Slack or Surplus        DuaLPrice
       1         10550.00             1.000000
       2        0.0000000            0.1500000
       3        0.0000000            0.1666667E-01
```

4.7. 非同時による誤り

LP の定式化ですべての制約が同時に働くということを強調しなければならない。したがって、すべての制約を同時に満足するような行動水準のうまい組み合わせを見つけなければならない。普通はどちらか一方を満足させるという形で理解しがちであるが、そうではない。ここで、靴下の 1 回分の生産の大きさを B としよう。そうすると、よくある方針としては「もし生産がおこなわれるならば、少なくとも 2 ダース以上は生産したい」というものである。このような場合に B は 0 であるか、あるいは 24 以上の値になるであろう。すると、この方針を次の 2 つの制約で書きたくなる誘惑に陥りがちである。

$B \leqq 0$

$B \geqq 24$

ここでは、この 2 つの両方が満たされねばならないので、可能解が存在しない。

このように、どちらかの制約を満足することが重要な場合には、これは整数計画法に頼らざるをえなくなる。このような定式化については、後で議論する。