第6章 製品混合問題

6.1. はじめに

製品混合問題は，アストロ・コスモ問題のように概念的には最も理解しやすい．現実では教科書に表われるような簡単な形のものはめったにない．しかし，それは多期間計画問題のような，より大きな問題の重要な構成要素であることが多い．

製品混合問題の特徴は，生産すべきいくつかの製品が，いくつかの有限な資源の利用に関して競合していることである．今ｍ個の資源とｎ個の製品があるとして，いわゆる技術は，ｍ行ｎ列の技術係数をもつ表で表わすことができる．第ｉ行第ｊ列の係数は，製品ｊを１単位生産するのに必要な資源ｉの単位数である．そのような表のある行に並んでいる数値は，単に LP における制約式の係数となる．簡単な製品混合問題では，これらの係数は非負である．さらに，各製品の１単位あたりの利益寄与と，各資源の利用可能限度がある．ここでの目的関数は，各資源の利用可能限度内で，それらの資源を使いながら利益を最大にするには，各製品をどれだけ生産すべきか，すなわち製品の混合を決定することである．

以下に述べる製品混合の例は，LP による定式化を説明するだけではなくて，
①非線形利益関数の記述と，
②通常の問題は，LP の定式化で，いくつかの代替的なやり方がある，
ということを説明している．２人の人が同じ問題を定式化した場合，明らかに異なる定式化もあるが，両方の解が等しいことが多い．

6.2. 製品混合問題の例

ある工場は，５つの異なる製品をいかなる組み合わせでも生産できる．各製品は，３つの機械で次の作業時間で生産できる（単位は分）．

	機械		
製品	1	2	3
A	12	8	5
B	7	9	10
C	8	4	7
D	10	0	3
E	7	11	2

各機械は，週あたり 128 時間利用できる．

製品 A，B，C は市場で，きわめて競争力が強いので，生産した分は５ドル，４ドル，５ドルで売ることができる．D と E については，週あたり生産された量のうち最初の 20 単位は，各４ドルで売ることができる．しかし 20 単位を超えた分は，すべて１単位あたり３ドルでしか売ることができない．変動労働費は，機械１と２は４ドル/時間であり，機械３は３ドル/時間である．材料費は製品 A

と C は 2 ドル/単位であり，製品 B，D，E は 1 ドル/単位である．そして，会社の利益を最大化したい．

この問題の重要で複雑な部分は，製品 D と E の利益寄与が線形でないことである．この複雑さを取り除くには，今新しい追加的な製品として D2 と E2 を定義するような工夫がいる．そしてこれらは 3 ドル/単位で売れるものとする．そうすると，もとの製品 D(=D+D2) と E の売り上げ量に，どんな上限が設定されなければならないか？

変数	定義	単位あたり利益寄与
A	週あたり生産される A の単位数	5 – 2 = \$3
B	週あたり生産される B の単位数	4 – 1 = \$3
C	週あたり生産される C の単位数	5 – 2 = \$3
D	20 単位を超えずに週あたり生産される D の単位数	\$3
D_2	20 単位を超えて週あたり生産される D の単位数	\$2
E	20 単位を超えずに週あたり生産される E の単位数	\$3
E_2	20 単位を超えて週あたり生産される E の単位数	\$2
M_1	週あたりの機械 1 の利用時間数	–\$4
M_2	週あたりの機械 2 の利用時間数	–\$4
M_3	週あたりの機械 3 の利用時間数	–\$3

モデルと解は次のようになる．

```
! Maximize revenue minus costs;
[_1]MAX = 3 * A + 3 * B + 3 * C + 3 * D + 2 * D2 + 3 * E
      + 2 * E2 - 4 * M1 - 4 * M2 - 3 * M3;
! Machine time used = machine time made available;
[_2]12*A+7*B+8*C+10*D+10*D2+7*E+7*E2-60*M1 = 0;
[_3]8*A + 9*B + 4*C + 11*E + 11*E2 - 60*M2 = 0;
[_4]5*A+10*B+7*C+3*D+3*D2+2*E +2*E2 - 60*M3=0;
[_5]   D <= 20;  ! Max sellable at high price;
[_6]   E <= 20;
!Machine availability;
[_7]   M1 <= 128;
[_8]   M2 <= 128;
[_9]   M3 <= 128;
END
```

最初の 3 つの制約（[_2]～[_4]）は，機械の使用時間（単位は「分」）を生産した製品の単位数の関数で表している．そして，次の 2 つの制約([_5]～[_6])は，高利益で売る D と E の生産単位数の上限を与えている．また最後の 3 つの制約は，利用できる機械の時間数についての上限を与えている．

制約 2 はまず最初に次のように書くことができる．

$$\frac{12A+7B+8C+10D+10D2+7E+7E2}{60}=M1$$

これに 60 をかけて M1 を左側にもってくると制約[_2]が得られる．そして，解は次のようになる．

```
 Optimal solution found at step:         4
Objective value:                1777.625
Variable           Value        Reduced Cost
       A       0.0000000            1.358334
       B       0.0000000           0.1854168
       C        942.5000           0.0000000
       D       0.0000000           0.1291668
      D2       0.0000000            1.129167
       E        20.00000           0.0000000
      E2       0.0000000           0.9187501
      M1        128.0000           0.0000000
      M2        66.50000           0.0000000
      M3        110.6250           0.0000000
     Row    Slack or Surplus      Dual Price
       1        1777.625            1.000000
       2       0.0000000           0.2979167
       3       0.0000000           0.6666667E-01
       4       0.0000000           0.5000000E-01
       5        20.00000           0.0000000
       6       0.0000000           0.8125000E-01
       7       0.0000000            13.87500
       8        61.50000           0.0000000
       9        17.37500           0.0000000
```

解は簡単である．高利益を得ることができる E の単位数が最も利益に寄与するため，制限一杯の 20 単位生産することになる．その後，製品 C が利益率が高いので，C を機械 1 の容量制限一杯作る．

この問題は，いくつかの定式化が可能である．これらの代替的な定式化は，すべて正しいが，その制約や変数の数が異なる．例えば，次の制約

```
8A+9B+4C+11E+11E2-60M2=0
```

は次のように書き直すことができる．

```
M2=（8A+9B+4C+11E+11E2）/60
```

そして M2 に代わって右側の式を代入する．右側の式は常に非負であるから，M2 に関する非負制約は自動的に満足される．したがって，若干の計算をいとわなければ，この問題から M2 とその制約を除去できる．このような議論は M1 と M3 にも適応できるので，次のモデルが得られる．

```
MAX = 1.416667*A+1.433333*B+1.85*C+2.183334*D+ 1.183333*D2+ 1.7*E + .7*E2;
! Machine time used = machine time made available;
```

```
12*A + 7*B + 8*C + 10*D + 10*D2 + 7*E + 7*E2 <= 7680;
8*A + 9*B + 4*C + 11*E + 11*E2 <= 7680;
5*A + 10*B + 7*C + 3*D + 3*D2 + 2*E + 2*E2 <= 7680;
! Product limits;
D < 20;
E < 20;
```

こうして，より標準的な製品混合のモデルが得られた．ここですべての制約は，何らかの容量制限である．また，このモデルの解が，まったく前のモデルの解と同じであることに留意すべきである．

```
Optimal solution found at step:        6
Objective value:                1777.625
Variable           Value        Reduced Cost
       A        0.0000000           1.358333
       B        0.0000000          0.1854170
       C         942.5000          0.0000000
       D        0.0000000          0.1291660
      D2        0.0000000           1.129167
       E         20.00000          0.0000000
      E2        0.0000000          0.9187500
     Row    Slack or Surplus      Dual Price
       1         1777.625           1.000000
       2        0.0000000          0.2312500
       3         3690.000          0.0000000
       4         1042.500          0.0000000
       5         20.00000          0.0000000
       6        0.0000000          0.8125000E-01
```

なまけ者の人は最初の定式化を好み，計算をいとわない人は２番目の定式化をすることになる．

6.3. 生産工程選択の製品混合問題

製品混合の特徴は，２つあるいはそれ以上の変数が，同じ製品を生産するための代替的な方法に対応づけられている点である．このような場合，LP は１つの製品をどれぐらい生産すべきかを発見するだけではなくて，その製品を生産するための最適な生産工程を選択するためにも使われる．

製品混合問題の２番目の特徴は，ある製品についてある特定の量までは生産しなければならないという条件である．このような条件を追加すると，その問題はもはや単なる製品混合問題とはいえなくなる．ここで，これら２つの特徴を備えた問題を考察しよう．

アメリカメタル組み立て会社（AMFC）は，鋼棒から種々の製品を生産している．まず，初期段階の１つに成形工程がある．これは３種類の回転機械（B3，B4，B5）で遂行される．これらの特徴は

次の表で表わされている.

機械	速度 (ﾌｨｰﾄ/ 分)	許容原材料厚さ (ｲﾝﾁ)	週当たり利用可能時間数	時間あたり運転の為の労働費用
B_3	150	3/16 ～ 3/8	35	$10
B_4	100	5/16 ～ 1/2	35	$15
B_5	75	3/8 ～ 3/4	35	$17

機械の能力がこのような組み合わせで表われるのはめずらしくない．大量な材料を処理する機械は一般的にスピードは遅い.

今週生産すべき製品は３種類ある．AMFC は，少なくとも 1/4 インチ材料を 218,000 フィート，3/8 インチ材料を 114,000 フィート，そして 1/2 インチ材料を 111,000 フィート生産しなければならない.

これら３種類の製品の利益寄与/フィートは，労働費用を除くと各 0.017, 0.019, 0.02 である．これらの価格はすべての生産に適用される．例えば，必要生産量より多く生産した場合でも，これが適用される．出荷部門はその材料の厚さにかかわらず，週あたり 600,000 フィートの容量しか取り扱うことができない.

この問題の制約と決定変数は何であろうか？明らかにこの問題では，この AMFC 社の３つの限られた機械資源と出荷部門の取り扱い可能容量という４つの制約がある．また，３製品の必要生産量としての制約がさらに３つある.

しかし，決定変数についてはもう少し考える必要がある．1/4 インチの材料を生産するにはたった１つの方法しかない．また，3/8 インチの材料を生産するには３つの生産方法があり，1/2 インチ材料については２つの方法がある．したがって，少なくとも次のような決定変数を考えることができる.

B34=B3 の機械で生産される 1/4 インチ材料の総長（単位 1,000 フィート）
B38=B3 の機械で生産される 3/8 インチ材料の総長（単位 1,000 フィート）
B48=B4 の機械で生産される 3/8 インチ材料の総長（単位 1,000 フィート）
B58=B5 の機械で生産される 3/8 インチ材料の総長（単位 1,000 フィート）
B42=B4 の機械で生産される 1/2 インチ材料の総長（単位 1,000 フィート）
B52=B5 の機械で生産される 1/2 インチ材料の総長（単位 1,000 フィート）

目的関数としては，労働費を含んだ利益寄与を考えなければならない．そしてこの場合には，次のようになる.

変数	１フィートあたりの利益寄与
B_{34}	0.01589
B_{38}	0.01789
B_{48}	0.01650
B_{58}	0.01522
B_{42}	0.01750
B_{52}	0.01622

機械利用の容量制限を求めるには，1,000 フィートを処理するのに必要な時間数が必要である.

機械 B3 の場合，この数字は 1000／｛(60 分／時間）×（150 フィート／分)｝＝0.111111（単位は 1,000 フィートあたり時間）である．同様に B4 と B5 については，1,000 フィートあたり各，0.16667 時間，0.22222 時間である．

したがって，この定式化は次のようになる．

```
! Maximize revenue minus costs;
MAX = 3 * A + 3 * B + 3 * C + 3 * D + 2 * D2 + 3 * E
     + 2 * E2 - 4 * M1 - 4 * M2 - 3 * M3;
! Machine time used = machine time made available;
12*A + 7*B + 8*C + 10*D + 10*D2 + 7*E +  7*E2 - 60*M1 = 0;
8*A + 9*B + 4*C + 11*E + 11*E2 - 60*M2 = 0;
5*A + 10*B + 7*C + 3*D + 3*D2 + 2*E + 2*E2 - 60*M3=0;
   D <= 20;  ! Max sellable at high price;
   E <= 20;
!Machine availability;
   M1 <= 128;
   M2 <= 128;
   M3 <= 128;
END
```

最後の３つの制約式を取り除くと，これは単なる製品混合の問題である．

ここで，費用という観点から，最適解を演繹的に導き出してみよう．1/4 インチ製品は B3 機械だけでしか生産できないので，B34 は少なくとも 218 であることがわかる．また，3/8 インチ製品は 1/4 インチ製品よりも，B3 機械を使う方が利益率が高いので，B34 は 218 に等しく，残りのスラックとしては，B38 がその値をとることがわかる．1/2 インチと 3/8 インチ製品は，B4 もしくは B5 のどちらでも生産できる．いずれにしても，1/2 インチの方がこの場合，１フィートあたりの利益率が高いので，B48 と B58 は，絶対的に必要な量よりは多くならない．そこで問題は，「絶対的に必要な量」はどれだけかということである． 3/8 インチ材料の場合には，B4 や B5 で処理するよりは，B3 で処理する方が利益率が高い．したがって， 3/8 インチ材料の需要を B3 で満たすことがわかる．しかしそれで不十分ならば，その残りが B4 または B5 にあてがわれることがわかる．具体的には，次のようになる．

まず B34 ＝218 にセットする

そうすると，B3 のスラックは，35－218 ×0.11111 ＝10.78 時間となる．これは，3/8 インチ材料を 97,000 フィート生産するのに十分である．したがって，結論は次のようになる．

B38 ＝97

3/8 インチ材料の需要の残りは，機械 B4 又は B5 で作られなければならない． 3/8 インチ材料の利益寄与は，機械 B5 より B4 で作る方が高いので，この 3/8 インチの残り需要は，機械 B4 で作るべきと思われる．しかし，ここで留意すべきことは，1/2 インチ材料もまた同じ差で，B5 で作るよりも B4 で作る方が利益率が高い．したがって，この 3/8 インチ材料の残りは，B4 と B5 のどちらで作ってもよいことになる．そこで恣意的ではあるが，3/8 インチ需要の残りは，B4 機械を利用すること

にすると，(B48 ＝17) になる．

残った設備容量は，1/2 インチ製品の生産に使われる．ここで，35－17×0.16667 ＝32.16667 時間の設備容量が B4 に残っている．この時点で，出荷容量についても配慮しなければならない．そこで計算すると，600 －218 －97－17＝268 (単位は 1,000 フィート) の出荷容量がまだ残っている．B52 よりも B42 の方が利益率が高いので，これをできるだけ大きくする．すなわち，32.16667／0.16667 ＝193 となる (B42 ＝193)．

この時点で残っている出荷容量は，268 －193 ＝75 である (B52 ＝75)．

どんな LP でも，理論的には，上のような経済的な議論で解くことが可能である．しかし，その計算は非常に煩雑であり算術や論理の間違いを犯しやすくなる．

LINGO の解は，今ここで得られた解と同じであり，以下のようである．Optimal solution found at step: 2

Objective value: 10073.85

Variable	Value	Reduced Cost
B34	218.00000	0.000000
B38	97.00315	0.000000
B48	16.99685	0.000000
B58	0.00000	0.000000
B42	192.99900	0.000000
B52	75.00105	0.000000

Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	10073.85	1.000000
2	0.000000	24.030240
3	0.000000	7.679846
4	18.333270	0.000000
5	0.000000	16.220000
6	0.000000	-3.000000
7	0.000000	-1.000000
8	157.000000	0.000000

Ranges in which the basis is unchanged:

Objective Coefficient Ranges

Variable	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
B34	15.89000	3.000000	INFINITY
B38	17.89000	INFINITY	2.670000
B48	16.50000	1.000000	0.0
B58	15.22000	0.000000	INFINITY
B42	17.50000	0.0	1.000000
B52	16.22000	1.280000	0.0

Righthand Side Ranges

Row	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	35.00000	1.888520	9.166634
3	35.00000	12.50043	13.75036
4	35.00000	INFINITY	18.33327
5	600.0000	82.50053	75.00105
6	218.0000	97.00315	16.99685
7	114.0000	157.0000	16.99685
8	111.0000	157.0000	INFINITY

ここで B58 は 0 であるが，その減少費用もまた 0 であることに留意しよう．その意味は，B58 を増加しても（B48 を減少しても）利益に影響を及ぼさない．これはすでに述べたように，3/8 インチの需要を満たすにあたって,B48 もしくは B58 のどちらを使ってもよいというわれわれの観察と一致している．

以下は，集合を用いたモデルである．

```
!This is a sets version of the previous example;
MODEL:
SETS:
   MACHINE / B3, B4, B5 / : HPERWK, TIME;
!This is the coefficient for the time per day constraint;
   THICKNESS / FOURTH, EIGHT, HALF / : NEED;
!This is the amount of each thickness needed
to be produced;
   METHOD ( MACHINE, THICKNESS ) : VOLUME, PROFIT, POSSIBLE;
!VOLUME is the variable, PROFIT the objective coefficients, and POSSIBLE is a Boolean
representing whether it is possible to produce the given thickness;
ENDSETS
DATA:
!  Hours/week available on each machine;
    HPERWK =   35,   35,   35;
! Hours per 1000 feet for each machine;
      TIME = .11111 .16667 .22222;
! Amount needed of each product;
      NEED = 218    114    111;
! Profit by product and machine;
    PROFIT = 15.89, 17.89,  0,
             0,     16.5,  17.5,
             0,     15.22, 16.22;
```

```
! Which products can be made on which machine;
  POSSIBLE =  1,     1,     0,
              0,     1,     1,
              0,     1,     1;
! Shipping capacity per day;
  SHPERDAY = 600;
ENDDATA
!--------------------------------------------------;
!Objective function;
MAX = @SUM( METHOD(I,J): VOLUME(I,J) * PROFIT(I,J));
@SUM( METHOD( K, L): VOLUME( K, L)) <= SHPERDAY;
!This is the max amount that can be made each day;
@FOR( MACHINE( N):
! Maximum time each machine can be used/week.;
@SUM( THICKNESS( M):
POSSIBLE(N,M) * VOLUME(N,M) * TIME(N))<=HPERWK(N););
@FOR( THICKNESS( Q) :
!Must meet demand for each thickness;
@SUM( MACHINE(P): POSSIBLE(P,Q)*VOLUME(P,Q))>=NEED(Q));
END
```