第3章 解の分析

3.1. 解の経済的分析

解のレポートから、面白い経済的な相当量の情報を収集することができます。 それに加えて、例えば範囲分析のようなオプションのレポートは、更なる情報を提供してくれます。これらの情報の
普通の使用法は、What if 分析をすることです。典型的な What if 分析に関する質問は、次の点です。

(a)容量や需要を変えることの影響は？

(b) 新しい機会が利用できるだろうか？ それは、価値があるだろうか？

3.2. 双対価格と減少費用の経済的関係

減少費用と双対価格は関係があります。変数 x の減少費用は、制約 x>=0 の双対価格の符号を逆にしたものに等しくなります。x の減少費用は、x が 0 から増えた場合に解が悪化する率を測定しています。x>=0 の双対価格は右辺定数項が 0 から増えたとき解がよくなる率を測定しています。

減少費用と双対価格は、次のようについて整理できます。

① 活動水準がゼロの減少費用（Ｚｊ －Ｃｊ）：
　その活動水準を１単位強制的に増加したときに、目的関数すなわち利益が減る量を示す。

② 制約式の双対価格：
　その制約式に関連する資源の利用可能な量が、１単位だけ減ったときの利益の減少分。

ある活動水準の減少費用は、次のような解釈が成り立ちます。ある活動の活動水準を増加することは、各種資源を喰いつぶします。それらを双対価格で価格づけると、減少費用は正味の費用効果になるという経済的な意味がでてきます。もし、ある活動の水準が、解が１単位だけ増加したとき、それは各資源を消費するので、他の活動のための利用可能性を減少させる効果がでてきます。ところが、これらの資源は双対価格で価値づけされているので、その活動には負担金を科す必要があります。これを例を用いて示します。

3.2.1. 費用の算定: 例

今、ET 社は、その生産ラインにビデオレコーダーの追加を検討していると仮定します。この会社の市場調査部門と技術部門では、このビデオレコーダーの利益寄与（Ｃj)は 47 ドル/単位と見ています。この場合、新しいビデオレコーダーは、Astro のラインを使って生産され、また３人日の労働が必要とされます。これを生産するには、Astro と Cosmo の両方の生産が減少します。なぜなら、Astro とは生産ラインと労働制約を競合し、Cosmo とは労働資源の利用で競合するからです。このトレイド・オフの価値はどうでしょうか？。有益なトレイド・オフのように思われます。これは、Cosmo に比べて、労働１時間あたりの利益が多く、また Astro に比べて、Astro の生産ラインの利用効率はよい為です。ここで、もとの解で Astro の容量に対する双対価格が 5 ドルで、労働制約の双対価格が 15 ドルであることを思い起し

てください。したがって、ビデオレコーダーの価格づけは、 1×5 ＋ 3×15－47=3（ドル）となります。この正味の費用は正です。したがって、このビデオレコーダーを生産することは、明らかに価値がありません。

制約	係数	双対価格	チャージ
1	－47	1	－47
2	1	+5	+5
3	0	0	0
4	3	15	+45
		Total opportunity cost =	+3

ここで、手計算による分析は終え、LP を解いてみましょう。今、Vをビデオレコーダーの生産数とすると、次のようになります。

```
MAX = 20 * A + 30 * C + 47 * V;
          A                + V <=  60;
                  C            <=  50;
          A + 2 * C   + 3 * V <= 120;
```

解は次の通りです。

```
Optimal solution found at step:          1
Objective value:                  2100.000
Variable            Value           Reduced Cost
       A         60.000000            0.000000
       C         30.000000            0.000000
       V          0.000000            3.000000
     Row    Slack or Surplus       Dual Price
       1       2100.000000           1.000000
       2          0.000000           5.000000
       3         20.000000           0.000000
       4          0.000000          15.000000
```

この解では、ビデオレコーダーは生産されていません。しかも、Vの減少費用が３ドルです。
この３ドルは、われわれがVについて価格づけをした時の値です。この事は、次のような関係を説明します。

> ある活動Xj の減少費用（Zj−Cj）は、その活動（Xj）が利用する諸資源の利用率（aij）の荷重和から利益寄与（Cj）を差し引いたものである。ただし、荷重としては双対価格を使う。

すなわち LP の双対価格は、総利益が不十分な資源に割り当てられていることに気がつくでしょう。なぜならば、上記の例で、5×60＋0×50＋15×120＝2100 です。

3.2.2. 双対価格/ラグランジェ定数/KKT 条件と活動費用

LINGO や What'sBest で LP 問題を解くと、各制約の双対価格を得ます。単純化のため、目的関数が最大化で、制約式は左辺の制約式が右辺定数項より小さいか等しい(<=)と仮定します。制約式の双対価格は、制約の右辺定数項に関する目的関数の価値の変化率です。これは、等式制約に対するラグランジェ乗数の不等式制約の一般化です。この考えは、100 年以上前のアイデアです。

実例を示すために、次の非線形問題を考えます：

```
[ROW1] MAX = 40*( X+1)^.5 + 30*( Y+1)^.5 + 25*( Z+1)^.5;
[ROW2]        X                     + 15* Z   <= 45;
[ROW3]                   Y             + Z   <= 45;
[ROW4]     X* X      + 3* Y*Y     + 9 * Z*Z   <= 3500;
```

X, Y, Z >= 0 を仮定している。これを解くと次の解を得ます。

```
Objective value =   440.7100
 Variable          Value         Reduced Cost
        X       45.00000          0.0000000
        Y       22.17356          0.0000000
        Z      0.0000000          0.1140319
      Row    Slack or Surplus      Dual Price
     ROW2      0.0000000          0.8409353
     ROW3       22.82644          0.0000000
     ROW4      0.0000000          0.02342115
```

例えば、ROW2 の双対価格 0.8409353 は、ROW2 の RHS が少ない量（ε）で増えるならば、目的関数の値がおよそ 0.8409353*ε で増加することを意味しています。

特定の変数 Z が使われていない理由を理解しようとするとき、役に立つ展望は活動の費用を概算することです。我々は変数に目的関数の増分に対する信用を与えます。適用される率は、各制約式の双対価格です。この値は、変数に関する LHS の単に偏導関数です。変数 Z の値は、下で示されます：

Row	Z で偏微分	双対価格	全変化
ROW1	12.5	-1	-12.5
ROW2	15	.8409353	12.614029
ROW3	1	0	0
ROW4	0	.02342115	0
		Net(減少費用):	.11403

一方、X は次のようになります:

Row	X で偏微分	双対価格	全変化
ROW1	2.9488391	-1	-2.9488391
ROW2	1	8409353	.8409353
ROW3	0	0	0
ROW4	90	.02342115	2.107899
		Net(減少費用):	0

これらの 2 つの計算は、最適解における Karush/Kuhn/Tucker（KKT）条件です：

①正の減少費用を持つ変数はゼロ。

②利用される変数(値が正)は、減少費用が 0。

③正の双対価格をもつ「<=」制約は、スラックが 0 になる。

④正のスラックをもつ「<=」制約は、双対価格が 0 になる。

これらの状況は、補完的なスラック条件と呼ばれています。

3.3. 減少費用と双対価格の有効な範囲

減少費用と双対価格を説明する時、その変化の幅をきわめて小さい範囲に限定してきました。
例えば、ある制約の双対価格が 1 時間あたり 3 ドルであったとすると、利用できる時間数を増加させたとき､その利用可能時間をほんのわずか増加した時､利益が 3 ドル/時間だけ改善することを意味します。この改善の割合は、一般には、いつまでも続くものではありません。そこで、この利用できる時間量をもっと増やしていくと、これらの時間の価値は、最後には増加しなくなり、減少してしまいます。これは、一般的には常に正しいとは言えませんが、LP に限って言えば、ある制約の右辺定数項を増加することによって、その制約の双対価格を増加させることはできません。したがって、双対価格は、同じ値にとどまるか、あるいは減る一方です。

LP の右辺定数項を変化させた場合、決定変数の最適解は変わることになりますが、最適解の性格が変わらない限り、双対価格も減少費用も変わりません。ただし、ここで 0 でない変数の組み合わせが変わるか、あるいは拘束力をもっている制約の組が変化したとき（基底変数が変わったとき）に、最適解の性格が変わったと言います。要約すると、右辺定数項を変えていった場合、最適解の性格（基底）が変わらない限り、双対価格は変わりません。

ほとんどの LP は、オプションとして解の出力に加えて、感度分析に関する情報も出力します。
この感度分析では、上に述べた最適解の性格、すなわち基底が変化しない範囲を示します。
前のモデルを再び利用してみます。：

```
MAX = 20 * A + 30 * C + 47 * V;
          A               + V <=  60;
                  C           <=  50;
          A   + 2 * C   + 3 * V <= 120;
```

LINGO メニューで Range を選ぶと、次の感度分析が得られます。

```
Ranges in which the basis is unchanged:
                         Objective Coefficient Ranges
                      Current        Allowable       Allowable
Variable          Coefficient         Increase        Decrease
       A             20.00000         INFINITY        3.000000
       C             30.00000         10.00000        3.000000
       V             47.00000         3.000000        INFINITY
                            Right-hand Side Ranges
     Row              Current        Allowable       Allowable
                          RHS         Increase        Decrease
       2             60.00000         60.00000        40.00000
       3             50.00000         INFINITY        20.00000
       4             120.0000         40.00000        60.00000
```

ここでも出力は２つあります。１つは変数に関するものであり、１つは行（制約式）に関するものです。Ａ行の３の意味は、Ａの利益寄与（Ｃj)は、単位あたり３ドルまで減少させることができ、しかも生産すべきＡとＣの最適値が変化しない範囲を示します。これは、Astro と Cosmo 各 1 台の利益貢献は、合計で$50 であることを示します。もし、Astro と Cosmo の１組の利益寄与が３ドル減少して、単位あたり 47 ドルまで下がったならば、V の生産で利益が出てきます。1 台の V の生産は、Astro と Cosmo 各 1 台の生産に使う資源と等しいです。

この出力の同じ行に、INFINITY という文字がありますが、これはＡの利益を正の方にどれだけ増加しても、生産すべきＡとＣの最適量には変化をもたらさないことを示します。このことは、すでにＡをぎりぎりまで生産していることから明らかです。

変数Ｃの「許容減少「3 はＡとまったく同じです。Ｃの行にある 10 の意味は、Ｃの利益性（利益寄与）が少なくとも１単位あたり 10 ドル増加して$40/単位にならなければ、ＡとＣの値の変化は考えられません。Ｃに対して１単位あたり 40 ドルであると、労働１時間あたりの利益は、ＡとＣで同じになります。

一般的にいって、ある１つの目的関数の係数が、最適解の変数に関する感度分析に示された範囲内で変化するとき、決定変数の最適値（A と C と V の値）は変化しません。しかし、双対価格、減少費用、および解の利益値は変化します。

制約式に関する感度分析の解釈は、ある制約の右辺定数項が、行に関する感度分析に示された範囲内で変化するとき、双対価格と減少費用の最適解は変化しません。しかし、その場合、決定変数の値および解の利益は変化します。

例えば行に関する感度分析から、第 3 行の右辺定数項、すなわちＣ≦50 という項の右辺定数項が 20 以上減少すると、双対価格や減少費用が変化します。このとき、制約はＣ≦30 となり、解の性格は、労働制約がもはや拘束として働かないように変化します。Ｃ≦50 という制約の右辺定数項を増加させた時、感度分析によると、上の方にいくら増加しても最適な双対価格や減少費用は影響を受けません。
すでに Cosmo のラインは容量が余っているので、容量を増やしても影響しないことで理解できます。
これらの概念を説明するために、ET 社問題の労働量を 61 時間減らして 59 時間で解いてみましょう。

定式化は次のようになります。：

```
MAX = 20 * A + 30 * C + 47 * V;
           A               + V <= 60;
                    C          <= 50;
           A  + 2 * C  + 3 * V <= 59;
```

解は次の通りです。：

```
Optimal solution found at step:         1
Objective value:                 1180.000
Variable           Value        Reduced Cost
       A        59.00000           0.0000000
       C       0.0000000            10.00000
       V       0.0000000            13.00000
     Row    Slack or Surplus      Dual Price
       1        1180.000            1.000000
       2        1.000000           0.0000000
       3        50.00000           0.0000000
       4       0.0000000            20.00000
Ranges in which the basis is unchanged:
                   Objective Coefficient Ranges
             Current      Allowable      Allowable
Variable   Coefficient     Increase       Decrease
       A      20.00000     INFINITY       4.333333
       C      30.00000     10.00000       INFINITY
       V      47.00000     13.00000       INFINITY
                      Right-hand Side Ranges
     Row      Current      Allowable      Allowable
                  RHS       Increase       Decrease
       2      60.00000     INFINITY       1.000000
       3      50.00000     INFINITY       50.00000
       4      59.00000     1.000000       59.00000
```

まず第１に、労働制約の右辺定数項が 60 以上減ると、双対価格と減少費用の多くは変化します。特に、双対価格は$20/時間です。これは、労働があと１時間追加されると、20 ドルの Astro をあと１個作るのに利用できるからです。このようにして、労働の限界価値は、次のように変化することに注意しなければなりません。

利用可能労働	双対価格	理　由
0 から 60 時間まで	20 ドル/時	1 時間追加されるごとに､それは 20 ドルの Astro 1 台の生産にあてられる。
60 から 160 時間まで	15 ドル/時	追加される各 1 時間は、30 ドルの Cosmo 半台の生産にあてられる。
160 から 280 時間まで	13.5 ドル/時	Astro の半台をあきらめ、利益(20 + 47)/2 をもつ V 半台の生産にあてられる
280 時間以上	0 ドル	追加される労働資源は利用価値がない。

一般的にいって、どの制約に関する双対価格でも、上のように段階的に減少します。

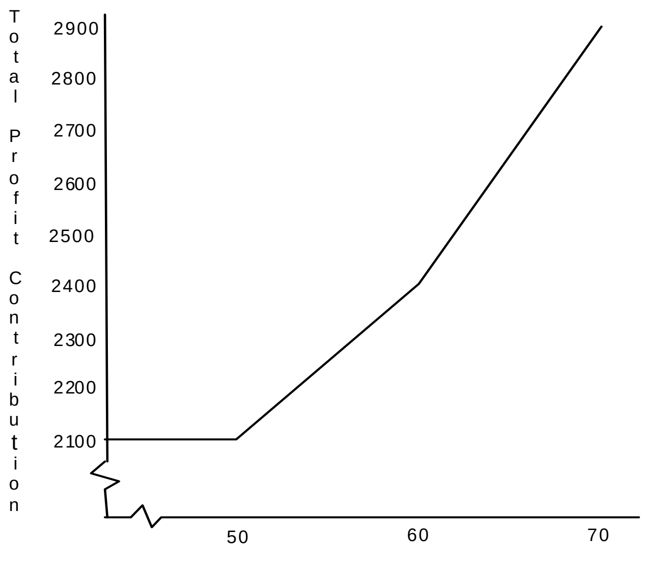

図 3.1（総利益）vs.（活動 V の利益貢献/単位）

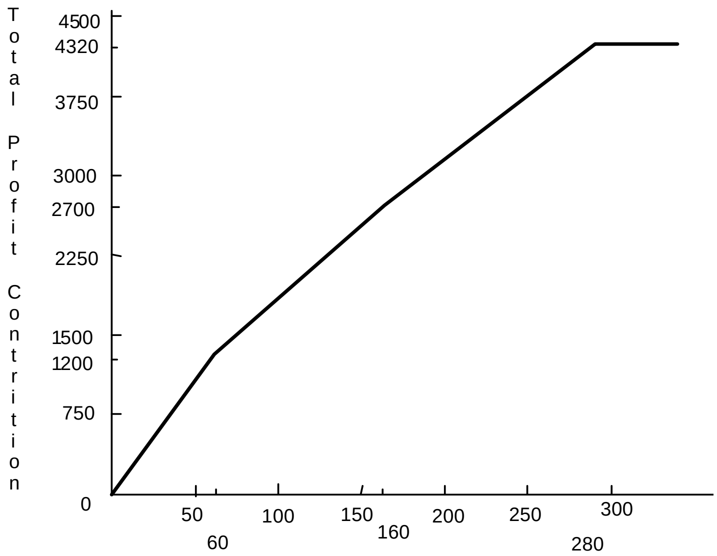

図 3.2（利益）vs.（利用可能労働量）

図 3.1 と 3.2 は、総利益が一つの目的関数の係数か一つの右辺定数項を変えることで、どう影響を受けるかを示します。読者は、最大問題で、次の点に注意して下さい。

①1 個の目的関数の 係数の関数の最適解の総利益は、常にボウル状の形を持つ。
　数学者はそれを凸関数と言う。

②1 個の右辺定数項の 係数の関数の最適解の総利益は、常に逆のボウル状の形を持つ。
　数学者はそれを凹関数と言う。

この問題では、図 3.1 と 3.2 の場合のように、我々はボウルの半分を見るだけです。 最小化問題では、①と②は単に逆になります。

特定の目的関数の係数または右辺定数項の値でモデルを解くと、これらの曲線のうちの一つの点を得ます。範囲報告は、この 1 点がある線分の端点を与えます。

3.3.1. パラメータの同時変化の影響の予測—100%ルール

範囲分析の示す情報は、１つの費用係数（Cj)、もしくは資源係数（Bi）が変化したときの効果を表わす。ET 社問題の範囲分析を例にして示すと、次のようになります。

```
Ranges in which the basis is unchanged:
                         Objective Coefficient Ranges
                  Current         Allowable        Allowable
Variable        Coefficient        Increase         Decrease
       A         20.00000          INFINITY         5.000000
       C         30.00000          10.00000         30.00000
                          Right-hand Side Ranges
     Row          Current         Allowable        Allowable
                      RHS          Increase         Decrease
       2         60.00000          60.00000         40.00000
       3         50.00000          INFINITY         20.00000
       4         120.0000          40.00000         60.00000
```

これによると、Astro の利益寄与（Cj）は、単位あたり 5 ドル以内まで減らしても、基底は変化しません。この場合、最適解は、20 台の Astro と 30 台の Cosmo を生産することを示しています。

ここで市場競争に勝つため、Astro の価格を 3 ドル/台、Cosmo の価格を 10 ドル/台減少させてみましょう。この場合、Astro と Cosmo を同じ混合率で生産するのが有益でしょうか？　それぞれの利益寄与を単独に変えるのであれば、 3≦5 であり、10≦30 ですから、これらの変化は解になんら変化をもたらさないでしょう。しかし、これらの変化が同時になされると、話は別です。直感的に考えた場合、基底変化をおこさないパラメータの同時変化のルールは、何かないでしょうか？

100%ルール： ここで、許容される変化の範囲はスラックと考えられます。そして、そのスラック分だけ、パラメータが変化するものとします。もし、スラック変化の比率和が 100 %以下であれば、どんな変化の組み合わせも基底を変えないというのが事実です。この場合、同時変化について、次のことがいえます。

$$\left(\frac{3}{5}\right)\times 100 + \left(\frac{10}{30}\right)\times 100 = 60\% + 33\% = 93.3\% < 100\%$$

これは上の条件を満足すので、これらの変化は基底変化を引き起こしません。

Bradley、Hax、 Magnanti（1977）は、このルールを 100 %ルールと名付けています。ここで、A と C の最適解における値は変化しませんので、これらの利益変化が、最終利益に与える影響を計算すると、

$-3 \times 60 - 10 \times 30 = -480$

であり、新しい利益値は、2100－480=1620 です。

変更した定式化と解は次の通りになります。：

```
MAX = 17 * A + 20 * C;
         A           <= 60;
                   C <= 50;
         A +   2 * C <= 120;
Optimal solution found at step:          1
Objective value:                  1620.000
Variable           Value         Reduced Cost
       A          60.00000          0.0000000
       C          30.00000          0.0000000
     Row     Slack or Surplus      Dual Price
       1          1620.000           1.000000
       2         0.0000000           7.000000
       3          20.00000          0.0000000
       4         0.0000000           10.00000
```

3.4. 制約係数の感度分析

右辺定数項（Bi）、および目的関数の係数（Cj）の感度分析は、これらの係数の変化が、適度の範囲内であれば、目的関数の値は線形的に変化するから、比較的理解しやすいです。残念ながら、制約式内の係数（Aij）の変化については、目的関数の値は、非線形的に変化します。しかし、これらの制約式内の係数の小さな変動効果を近似する簡単な式があります。ここで、LP で第 i 番目の行の変数 j の係数を少量 e だけ減少した時の効果を調べてみましょう。その時の算定式は、次のようになります。

目的関数の値の改善分≒(変数jの値)×(第i行の双対価格)×e

例)　例えば、次の問題を考えてみましょう。

```
MAX = 20 * A + 30 * C;
A <= 65;
C <= 50;
A + 2 * C <= 115;
```

解は次のようになります:

```
Optimal solution found at step:          1
Objective value:                    2050.000
Variable          Value          Reduced Cost
      A        65.00000            0.0000000
      C        25.00000            0.0000000
    Row    Slack or Surplus      Dual Price
      1        2050.000             1.000000
      2       0.0000000             5.000000
      3        25.00000            0.0000000
      4       0.0000000             15.00000
```

ここで、第 4 行の変数Cの係数が、2ではなくて、2.01 のはずであると発見したとします。上の式を使えば、目的関数の値は、次のように近似的に減ることになります。

25×15×0.01=3.75

この変更した問題を解いてみると、実際の目的関数の値は 2046.269 になります。したがって、実際の目的関数値の減少分は、3.731 になります。

この制約係数の小さな変化の効果を表わす式は、次のように考えると、意味がよくわかります。
もし、係数変化が小さければ、すべての変数や双対価格は、本質的には変化しないはずです。したがって、この係数が 2 から 2.01 に変化するということは、実際には労働の必要量が 25×0.1 だけ増えるということになります。そこで、実質的な効果としては、25×0.01 時間だけ利用できる労働時間が減ったことに相当します。しかし、労働の価値は 15 ドル/時間であるから、利益の変更分は、25×0.01×15 になります。そして、この値は前の簡便な算定式による値と一致します。

この種の感度分析は、どの係数を正確に推定すべきかを発見するための良い指針になります。もし、変数 j の値と i 行の双対価格を掛け算した値が、比較的大きいとき、第 i 行の変数 j の係数を正確に推定しないと、総利益の正確な推定が得られないことになります。

3.5. 双対 LP 問題あるいは土地の貸し手と借り手

色々な問題を定式化していて、外見の異なる定式化が同じ問題であることを発見することがあります。各々の定式化は正しくて、問題を異なる視点から見たに過ぎません。LP 問題で、数学的に関心を引く事実は、同じ問題に 2 つの定式化が常にあるということです。1 つの定式化は「主問題」と呼ばれ、他は「双対問題」と呼ばれます。2 つの異なる定式化は、問題の 2 つの異なる視点に起因します。これらの 2 つの視点を「借り手と貸し手」と考えます。

以下の状況を考えてみます。あるイタリアの織物会社は、自身の製造施設を持たないで、単に必要に応じて適当な器材を所有する会社から借ります。アメリカでは、類似した状況は、製品のリサイクルで存在します。古い電話ケーブルをリサイクルする会社は、単に銅を絶縁物から切り離すために必要な機械を賃借するかもしれません。この賃貸プロセスは、時々「tolling」と呼ばれています。有名ブランド

の香水業者は、自身の製造施設を所有しないものが多く、香水を必要に応じて作るため特定の化学会社に使用料を払って製造施設を借ります。この産業の基本的な特徴は、製造設備の所有者は原料や完製品を決して所有しないということです。

今、有名な Astro と Cosmo とビデオを製造する ET 社から、製造設備を借りて製品を生産することにしました。 3 つの資源（Astro と Cosmo の生産ライン、労働力）のために、ET 社に支払う 1 時間ごとの料金を決める必要があります。これらの 3 つの 1 時間ごとの料金が決定変数です。実際 3 つの資源の全てを賃借したとします。例えば、全資源（60、50、120)の賃借料金を最小にします。あなたの申し込みが成功する条件は、あなたの賃貸料金は十分に高くなければならないので、ET 社は製品のどれも生産します（例えば、Astro の賃貸料金は 20 を超えるので)必要がありません。賃貸条件の方がよいことが、制約になります。

問題を定式化すると、次のような決定変数が必要です。

PA=Astro の生産ラインに対する賃貸料（価格/単位）

PC = Cosmo の生産ラインに対する賃貸料（価格/単位）

PL=労働力に対する対する賃貸料（価格/単位）

双対問題は、次の通りです。

```
MIN = 60 * PA + 50 * PC + 120 * PL;
!ASTRO; PA + PL > 20;
!COSMO; PC + 2*PL > 30;
!VR;     PA + 3 * PL > 47;
```

3 つの制約は賃貸料が十分高いので、ET 社は自社生産する必要がありません。解は次の通りです。:

```
Optimal solution found at step:          2
Objective value:                    2100.000
Variable              Value          Reduced Cost
      PA           5.000000             0.0000000
      PC          0.0000000              20.00000
      PL           15.00000             0.0000000
     Row     Slack or Surplus        Dual Price
       1           2100.000              1.000000
       2          0.0000000             -60.00000
       3          0.0000000             -30.00000
       4           3.000000             0.0000000
```

主問題は、次の通りです。:

```
MAX = 20 * A + 30 * C + 47 * V;
A +               V <=  60;
          C       <=  50;
A + 2 * C + 3 * V <= 120;
```

解は次の通りです。

```
Optimal solution found at step:          1
Objective value:                   2100.000
Variable           Value          Reduced Cost
       A         60.00000           0.0000000
       C         30.00000           0.0000000
       V        0.0000000            3.000000
     Row    Slack or Surplus       Dual Price
       1         2100.000            1.000000
       2        0.0000000            5.000000
       3         20.00000           0.0000000
       4        0.0000000            15.00000
```

価格と決定変数が逆なことを除いて、2 つの解が本質的に同じです。特に貸借人が払う価格は、ET 社の最初のモデル(主問題)の利益貢献と同じものです。賃貸料の最小化は、元の利益最大化モデルの双対問題といいます。ただし、どの資源制約も守られる条件で 2 つの解の間の同等性が常に保たれます。

なぜ、双対モデルが重要でしょうか？ LP の計算時間は、ほぼ m^2*n に比例します。ここで、m =行数、n =列数です。双対モデルの行数が主モデルの行数より小さいなら、双対モデルを解く方が良いと言う事になります。

さらに(x ≤ 1)のような単純な制約は、任意の制約より簡単に計算できます。双対モデルが少数の任意の制約だけを含む場合、例えそれが多数の単純な制約を持つとしても、解くことはより簡単です。

双対価格は双対問題における決定変数の減少費用に対応しています。

我々は、次のように双対問題についての考えをまとめることができます。元の主問題が「≦」制約で最大化問題であれば、双対問題では「≧」制約で最小化問題になります。双対問題では、主問題の 1 つの制約式は、決定変数になります。そして、主問題の 1 個の決定変数は、1 個の制約式になります。双対問題の右辺定数項が k なら、主問題の目的関数の係数になります。同様に、双対問題の i 行 j 列の係数は、主問題の j 行 i 列の係数になります。全ての制約を同じ種類に変えるため、次の 2 点に注意して、上の方法を適用してみて下さい。

① 制約式 2x + 3y = 5 は 2x + 3y ≥ 5 と 2x + 3y ≤ 5 に変換する。

② 制約式 2x + 3y ≥ 5 は –2x – 3y ≤ –5 に変換する。

例題: 次の問題の双対問題を作成して下さい。

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & 4x - 2y \\
\text{subject to} \quad & 2x + 6y \le 12 \\
& 3x - 2y = 1 \\
& 4x + 2y \le 5
\end{aligned}
$$

上の(1)と(2) を用い、次のように書き換えます。

$$
\begin{aligned}
\text{Maximize} \quad & 4x - 2y \\
\text{subject to} \quad & 2x + 6y \le 12 \\
& 3x - 2y \le 1 \\
& -3x + 2y \le -1 \\
& -4x - 2y \le -5
\end{aligned}
$$

4 つの制約式に対応して、次の 4 個の双対変数 r, s, t, u を用い、双対問題を作成します。

$$
\begin{aligned}
\text{Minimize} \quad & 12r + s - t - 5u \\
\text{subject to} \quad & 2r + 3s - 3t - 4u \ge 4 \\
& 6r - 2s + 2t - 2u \ge -2
\end{aligned}
$$

3.6. 練習問題

1. Enginola 社は、新しいテレビ(Quasi)を導入することを検討しています。期待される利益は、1 台につき 25 ドルです。この製造は、Astro 用生産ラインを使います。1 台に Quasi の製造には、1.6 時間の労働を必要とします。元のモデルを使って、アストロの製造ラインの能力に変化がないことを前提でに、Quasi を生産する価値があるかどうかを決定してください。

   この問題の解は、下記によります。

```
MAX = 20 * A + 30 * C;
A <= 60;
C <= 50;
A + 2 * C <= 120;
Optimal solution found at step:        1
Objective value:                 2100.000
Variable           Value        Reduced Cost
       A           60.00000        0.0000000
       C           30.00000        0.0000000
Row          Slack or Surplus     Dual Price
       1            2100.000        1.000000
       2           0.0000000        5.000000
       3            20.00000       0.0000000
       4           0.0000000        15.00000
```

2.