第1章 数理計画法とは

1.1. はじめに

数理計画法（制約つきの最適化）は、希少資源の最適割り当てを決める数学的方法です。線形計画法（Linear Programming, LP）は，広告から生産計画まで、ビジネスのほとんどすべての面で応用事例がみられます。輸送・分配・多期間の生産計画問題等は、LP の最も典型的な対象分野です。石油産業は代表的な LP ユーザーです。
近年、ある大きな石油会社の情報処理の責任者が、同社におけるコンピュータ使用時間の５％から 10％が LP や LP に似たモデルの処理に使われていると発表しています。
読者は、LP の「プログラミング」とコンピュータ・プログラムの「プログラミング」は、
その趣が異なることを知ることが重要です。前者の場合は「計画」を意味し、後者の
場合は「計算」を遂行するための命令を書くことを意味します。一方のプログラミングの訓練は、他方とは直接には関係がありません。
ほとんどの最適問題では、2 つの分類が重要になります。まず最初は、土地・プラントの能力・販売サイズのように限られた資源であり、2 番目は,「低炭素鋼の生産」、「ステンレス鋼の生産」、「高炭素鋼の生産」のようなアクティビティ（活動）です。
各活動は、追加の総資源を消費したりおそらくは寄与します。問題は、実際に利用可能な資源以上を使用しないで、最も良い活動水準の組合せを決定することです。
私たちは次の簡単な例を考えることによって、LP の趣を最も良く理解できます。

1.2. 簡単な製品混合問題

Enginola Television 社（ET 社）は、2 種類のテレビ Astro と Cosmo を生産しています。各製品に対して 1 本の生産ラインがあります。Astro の生産ラインの生産能力は、1 日当り 60 台です。一方，Cosmo は一日当り 50 台です。また，Astro は
1 台の生産に 1 人時の労働力を必要とします。一方，Cosmo は 2 人時が必要です。2 種類のテレビの生産に割り当てることのできる 1 日当りの総労働力は、合計で最大 120 人時です。もし利益が Astro と Cosmo で 20 ドルと 30 ドルとすれば、1 日の生産をどの様にすべきでしょうか？
これを言葉で記述すれば次のようになります。

最大化	（利益）
制約条件	（Astro の生産台数）≦（Astr の生産能力）
	（Cosmo の生産台数）≦（Cosmo の生産能力）
	（実労働人時）　　　≦（利用可能労働人時）

これを定式化するために、次の簡単な変数（数理計画法では決定変数という）A と C を定義すると便利です。

A＝1 日当りに生産すべき Astro の台数
C＝1 日当りに生産すべき Cosmo の台数

標準形と呼ばれている数学表現（LINGO のスカラー形式）で、この問題を定式化すると次のようになります。括弧で示した単位が重要です。「≦や≧」は、等号を省いた「<や>」あるいは「<=や>=」で表されます。

```
MAX   =20*A + 30*C ;    （ドル）
      A        <=  60 ;       （Astro の生産能力）
      C        <=  50 ;       （Cosmo の生産能力）
      A  +  2*C  <=  120 ;    （労働時間）
```

最初の行「MAX=20*A＋30*C;」は,「目的関数」です。残りの 3 行は「制約式」として知られています。最適化プログラムの多くは、すべての変数が非負と仮定しています。したがって，制約式 A≧0，C≧0 は必要としません。

資源と活動には、次のような 3 つの資源があります : Astro の生産能力、Cosmo の生産能力、そして労働力です。2 つの活動は、Astro と Cosmo の生産台数です。

最適化における各制約式では，いくつかの資源を結合することができます。

一方，各決定変数に対して、それに対応する活動があります。各「活動」は、それに対応する「決定係数」で表されます。

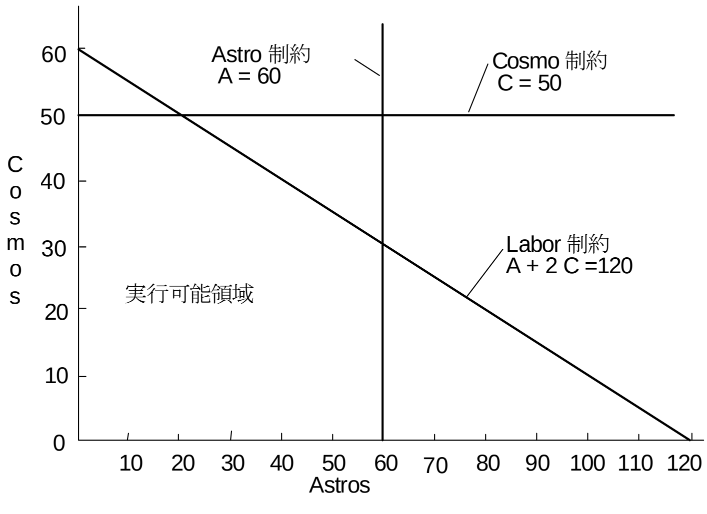

図 1.1　ET 社の実行可能領域

1.2.1.　グラフによる解析

ＥＴ社問題は，図 1.1 のグラフで示わすことができます。

実行可能な生産の組合せは，5 本の実線によって囲まれた範囲内にある点です。これを実行可能解といいます。

ここで一番高い利益を与える点を探します。

どこに最大利益の線があるかというアイデアを得るため、いくつかの方法があります。

A=C=0 の点は実行可能解ですが利益は 0 です。私たちが Cosmo 生産ラインの責任者と話すなら､｢Cosmo は我が社のより利益の大きい製品なので、できるだけ多く（50 台）作って，30*50＝1500 ドルの利益えお得るべきです。｣と答えるでしょう。

思慮深い読者は、A =0，C= 50 以外に、1500 ドルの利益を達

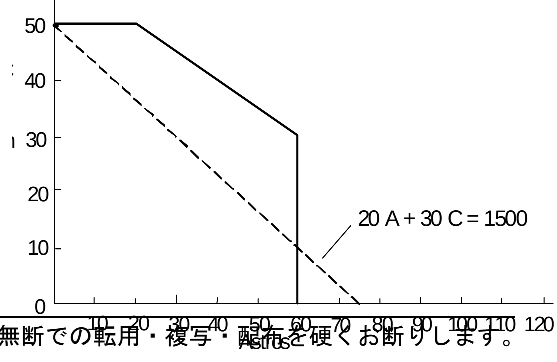

図 1.2　「利益＝1500」の ET 社問題

成する A と C の多くの組合せがあることに気づくでしょう。そして、20A＋30C＝1500 の線を図 1.2 のようにグラフに加えると、点線で表される区間上のどの点も 1500 ドルの利益になります。このような一定の利益を表す直線を、等利益直線（または費用最小化問題の場合，等費用直線）といいます。

次に Astro 生産ラインの責任者と話せば，彼はこう言うかもしれません:「 Cosmo を 50 台生産しても、まだ 20 台の Astro を生産できる労働力が余まっている。これは 1900 ドル(=30*50+20*20)の利益を生みます。なぜ、我々は働くのををやめて家に帰らなければいけないのでしょうか？」

注意深い読者は、1900 ドルの利益を得る多くの方法があることに気づくでしょう。20A+30C = 1900 を表す線分を図 1.3 のようにグラフに加えると、この線分上のどんな点も 1900 ドルの利益になります。

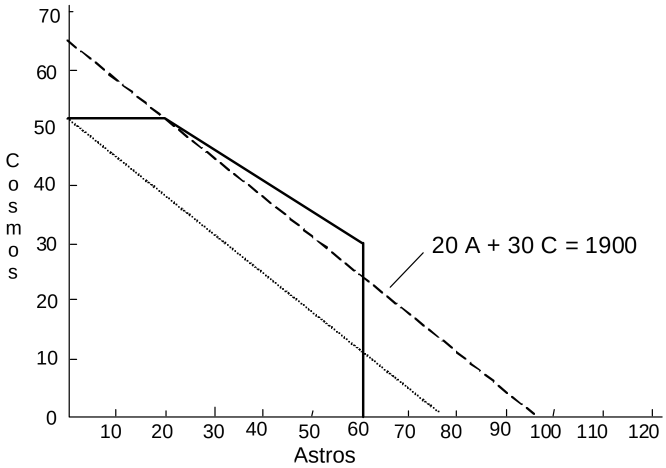

図 1.3「利益 = 1900」の ET 社問題

注意深い読者はきっと次のような洞察するでしょう。私たちが利益を増加させたいのなら、直線上に実行可能解があるぎりぎりまで等利益直線を平行移動させればよい。この最良の実現可能な点は A=60、C=30 です。それは図 1.4 に示す 20A+30C=2100 の線上にあります。たとえ Cosmo の 1 単位当たりの利益貢献度が高くても、Cosmo を 50 台作るより 30 台作るほうが最適解になります。この小さな問題の図による解法は、私たちがより大きな問題を分析する場合に何が起こっているか理解するのに役立ちます。

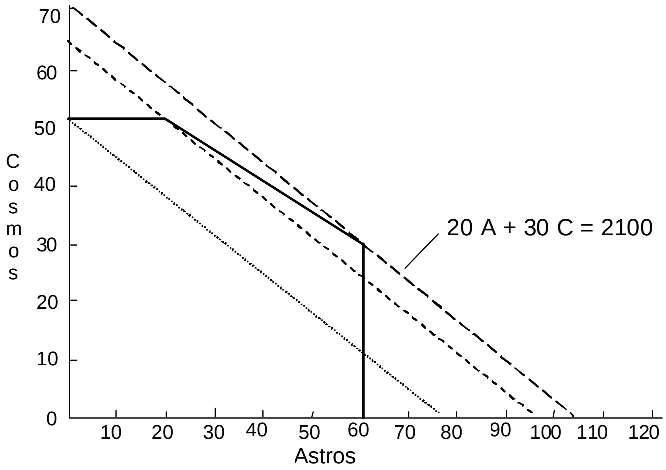

図 1.4　「利益 = 2100」の ET 社問題

1.3. 線形性

線形計画法は、私たちが関わることのできる活動の効果が、線形である場合に適用できます。実際問題で、線形要求は次の 3 つで構成されています。

①比例性：1 つの変数とそれ自身の活動の効果は、比例的です。例えば、鉄鋼の生産量を 2 倍にすれば，鉄鋼生産の現在のレベルに関わらず、販売される鉄鋼の売り上げや鉄鋼を生産するための電気消費量の総計は 2 倍になります。
②加法性：変数間の交互作用は加法的になります。例えば、販売高は鉄鋼の販売高、アルミニウムの販売高等の合計です。一方、電気消費量の総計は、鉄鋼，アルミニウム等を生産するために使用された電気量の合計です。
③連続性：変数は，連続的となります。すなわち、決定変数に対して 6.38 のような端数の値が許されます。

「販売価格」と「販売数量」という 2 つの決定変数が含まれているモデルは、おそらく線形では無いでしょう。比例要求は満足しますが 2 つの変数間に交互作用がある場合は、加法的でなく乗法的です。
すなわち、販売高＝価格×量であり、価格＋量ではありません。もし供給者が数量割引を行うと、比例制約を満たさなくなり、発注費用は発注量に比例したものより安くなります。
「建築すべきフロア数」という決定変数が含まれているモデルは、比例、加法要求を満足するかもしれません。しかし、最後の条件は破られます。6.38 階を建てるという決定は、段違い設計に優れた設計者がいなければ実行できません。それにもかかわらず、LP 解は、その様な端数の解を出力するかもしれません。

LP が適用できる問題は、実際にはこの例に示したものより、より一般的です。目的関数は、最大化の
場合だけでなく最小化の場合もあります。制約式の方向は ≦ の他に ≧ や等しい(=)こともあります。いくつかの、またはすべてのパラメータ、例えば 20，30，60，50，120，2，1 などは，正ではなくて負のこともあります。分析できる問題の主な制限は、次で述べる線形制約から生じます。しかし、後で述べるように整数計画法や 2 次計画法では、これらの線形性は必ずしも満足する必要がないことがわかります。
図 1.5 は，非線形関数の例を示します。たとえば
X＋Y は比例的ではあるが加法的ではありません。
X2＋Y2 は加法的であっても比例的ではありません。

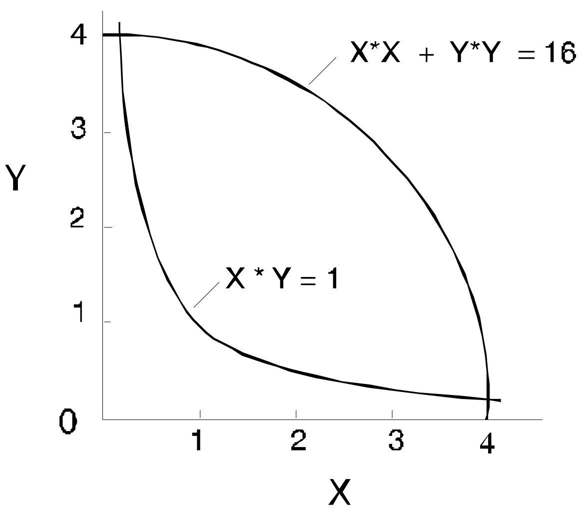

図 1.5 非線形関係

1.4. LP 解の分析

コンピュータで線形計画法を解くと、可能な結果として次の何れかになります。

線形計画法が適切に定式化されていれば、図 1.6 の一番左側の道をたどります。解を求める過程では、まず最初に 1 つの「可能解」を求めることを試みます。すなわち、「実行可能解」とは、すべての制約を同時に満足するが、必ずしも目的関数を最大化していないものを指します。
もし、定式化において、あまりにも厳しい要求をつきつけた場合、右図の一番右側の「可能解なし」の道をたどることがあります。その場合には、2 つあるいはそれ以上の制約があり、それらを同時に満たすことが不可能な場合です。

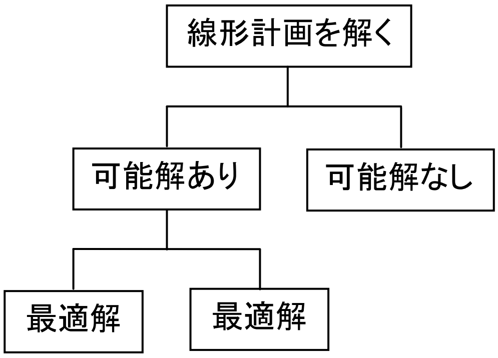

図 1.6　解の結果

例えば，X≦2 を満たし、かつ X≧3 を満たす，というような制約です。したがって、「可能解が存在しない」ということは、目的関数で決まることではなく、制約そのもので決まります。実際には、
可能解なしという結果は、ある大きな複雑な問題で起こりえます。例えば、生産活動の利用に上限が設けられ、しかも非現実的なほど高い需要がある場合などです。したがって、コンピュータから可能解なしというメッセージがでたときは、言いかえれば「ケーキを持っているという状態と、それを食べたという状態は、同時には成立しません」ということを告げているのに等しいのです。

もし，可能解が見つかれば、次の手続きは最適解を見つけることです。もし，「非有界」という事態に至ったならば、その定式化は制限なしの利益が得られることを認めるような、非現実的な定式化を意味しています。この場合は、重要な制約式を忘れているか、モデルの入力ミスであることが多いです。

ET 社問題を解くと，次のような解が得られます。

```
Feasible solution found at step:            1
Objective value:                      2100.000
Variable              Value          Reduced Cost
       A           60.00000            0.0000000
       C           30.00000            0.0000000
     Row     Slack or Surplus        Dual Price
       1           2100.000              1.00000
       2          0.0000000              5.00000
       3           20.00000            0.0000000
       4          0.0000000             15.00000
```

上記の出力は、「変数（VARIABLE）」と「行（ROW)」の 2 つの部分から成り立っています。
それぞれの部分の最初の 2 列は、きわめて明白です。利益を最大にする解は、Astro（A）を 60 単位、Cosmo（C）を 30 単位生産することで、利益として 2,100 ドルを達成できます。
この解では、A≦60 という制約である第 2 行でスラック変数がゼロとなり、C≦50 という制約の第 3 行

ではスラック変数が 20 となります。また、A+2C≦120 という制約の第 4 行ではスラック変数はゼロとなっています。60+2*30=120 に注意してください。

この出力で重要な追加的な情報があと 2 種類あります。それは第 3 列の減少費用(REDUCED COST)と、双対価格(DUAL PRICES)です。

次に、これらの減少費用や双対価格について説明すします。

1.5. 感度分析:減少費用と双対価格

現実的な線形計画法の問題では、非常に多くのデータが必要とされます。正確なデータを収集するのは非常に高価なため、実際には確信を欠くようなデータを使うことが多くなります。これに関連して、情報処理の世界で「ゴミを入れれば, ゴミが出てくる(garbage in, garbage out.)」という言葉があります。現実問題を分析する際に重要な事は、入力するデータが変わった場合、そのモデルの特性がどう変わるか?ということである。感度分析は、この種の問題に答えるために利用できます。
幸いなことに、線形計画法を解いた結果の出力には、この感度分析に役立つ補足的な情報が提供されています。すなわち、減少費用および双対価格という 2 つの標題のもとに示される情報がそれです。

また感度分析は、どの種の情報が注意して推定されなければならないかを明らかにしてくれます。
例えば、ある種の製品があまり利益をもたらさないことが明らかな場合、その製品の費用を推定するのにあまり苦労する必要はありません。したがって、モデル構築で重要な点は、「あるパラメータ推定のエラーが最終的な意思決定にほとんど影響を及ぼさない場合には、そのパラメータの正確な推定を得るのにあまり時間を費やすべきではない」ということです。

1.5.1. 減少費用

線形計画法の解の出力は、各変数ごとに、減少費用が出力されます。目的関数の単位がドルであり、ある変数の単位がガロンであれば、その変数の減少費用はドル/ガロンとなります。

数理計画法の最適解が得られたとき、その最適解を構成する諸変数の数値は、その値が正のものと、ゼロのものがあります。「そして，正の値をとる変数の減少費用は、常にゼロであり、またゼロの値をとる変数の減少費用は正の値（稀に，ゼロのときもあるが）になっています。」

減少費用（Zj－Cj)の意味は、「その変数（Xj)の利益寄与（目的関数の係数 Cj のこと）が、現在の値よりもあとどれだけ大きい場合､その変数 Xj が最適解において正の値をとるようになるかを示しています。」

減少費用のもう 1 つの解釈の仕方としては､現在の最適解においてゼロの値をとっているある変数が、少しだけその値を増加するように強制されたとき、目的関数の値が悪化する割合を示しています。

例えば、ある変数 X の減少費用が 2 ドル/ガロンとします。まず第 1 の解釈は、X の利益率（Xj1 単位あたりの目的関数の Cj 係数）が現在の値よりも 2 ドル以上大きくならない場合、この変数の値（活動水準）は、ゼロのままであることが最適解です。一方、変数 Xj の利益率 Cj を今のままにして X を 1 単位増加すれば、最適解は 2 ドルだけ悪くなります。すなわち、目的関数の値（総利益）は、2 ドルだけ減少してしまうので、この変数 Xj はゼロ値であることが最適であるということになります。

1.5.2. 双対価格

各制約式には、双対価格が出力されます。目的関数の単位が円で制約式の単位がキログラムである場合、双対価格の単位は円／kg となります。双対価格の値は、「今、右側の定数項（右辺定数項）の値が少量増加した際に、目的関数の値を改善する割合を表わしています。」

数理計画法のプログラム（ソルバーという）によっては双対価格に関する符号の規則が異っています。LINGO の場合、双対価格が正の場合、それは右辺定数項が 1 単位増加した際に、目的関数がどれだけ改善されるかを示しています。また、負の双対価格の意味は、右辺定数項が 1 単位増加した際に、目的関数がどれだけ悪化するかを示しています。双対価格がゼロの値の時は、右辺定数項を変化させても、目的関数には影響しないことを示しています。

したがって、この習慣の場合、≦で示された制約式は非負の双対価格をとり、≧で示された制約式は非正の双対価格をとります。そして＝で示された制約式はいずれの値の双対価格をもとり得ます。
なぜであろうか？　そして「減少費用は符号を逆転した双対価格である」ことに留意して下さい。
ここでの慣例では、ある変数 X の減少費用は、X が非負という制約においては、符号が逆転した双対価格になります。ある変数 X の減少費用が何を測っているかといえば、変数 X の値がゼロの値から増加し始めたときに、目的関数の値が悪化する割合です。一方、X が非負であるという制約に対応する双対価格が測っているものは、右辺定数項がゼロから増加し始めたときに、目的関数値、すなわち解の値が改善する割合です。（制約 Xj≧0 の右辺定数項が増加すれば、制約がいよいよ厳しい方向に向かうので、目的関数値は好ましくない方に変化します。したがって双対価格は負になります。）

ET 社問題の解における双対価格を分析すると話がわかりやすいです。
この問題において、A≦60 という制約に対する双対価格は 1 単位あたり 5 ドルとなっています。
一見、この双対価格は 1 単位あたり 20 ドルかと思われます。なぜなら、Astro をあと 1 単位追加生産すれば、その利益は 1 単位あたり 20 ドルです。ところが、Astro をあと 1 単位生産するとき、どこか別のところで犠牲が必要となります。今の解では、労働供給はすべて利用されています。そこで Astro をさらにもう 1 台生産するためには、Cosmo の生産を減少しなければなりません。Astro と Cosmo の労働のトレイド・オフは 1/2 です。
すなわち、Astro をもう 1 台追加生産することは、Cosmo の生産を 1/2 台減少することを意味します。
Cosmo は 1 台あたり 30 ドルの利益があります。ここで、正味の利益増分は、＄20－ 1/2×＄30＝＄5 となります。次に、労働制約の双対価格が、15 ドル／時間であることについて考えてみます。もし、もう 1 人日だけ労働を利用できるとしたら、それはすべて Cosmo の生産にふりむけられるでしょう。
Cosmo1 台の利益は 30 ドル／台です。もう 1 単位余分の 1 人日は、1/2 台の Cosmo の生産に相当するから、1 単位余分の価値は 15 ドル／人日です。

1.6. 非有解定式化の例

ここで、労働制約と Cosmo の生産制約を忘れたとします。そうすると、Cosmo を限りなく多く生産でき、無制限の利益が可能となります。線形計画法は次のようになります。

MAX = 20 * A + 30 * C;

A <= 60;

この結果、次のメッセージウインドウが現れます。

UNBOUNDED SOLUTION

C が無限に大きくなることを防ぐ制約はありません。図 1･7 は実行可能領域です。通常の規模の線形計画法では、無制限に増加できる変数が複数あり、どういう形で無制限な利益拡大ができるかということは，簡単には見分けられません。

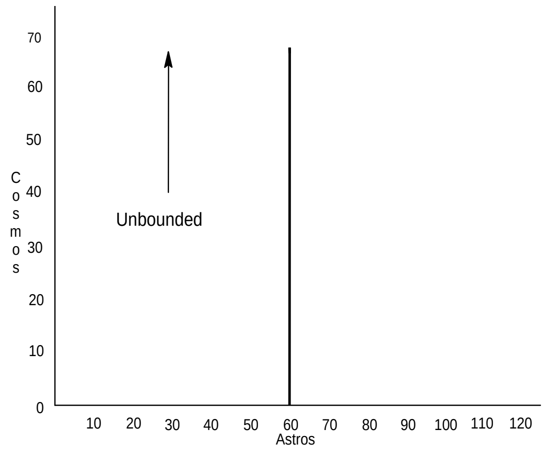

図 1.7 非有界

1.7. 不可能定式化の例

可能解が存在しない定式化の例として、労働制約の右辺を 190 とし、誤って不等号の向きを逆にした場合を考えてみます。この場合、利用できる労働力は Astro を 60 台、Cosmo を 50 台生産するのに利用されます。そして、総労働量は 160(=60＋2×50) 人日です。この場合の定式化と解は次の様になります。

```
MAX = 20 * A + 30 * C;
A <= 60;
C <= 50;
A + 2 * C >= 190;
```

ウインドウに次のエラーメッセージが現れます。

NO FEASIBLE SOLUTION

出力は次の通りになります。

Variable	Value	Reduced Cost
A	60.00000	0.0000000
C	50.00000	0.0000000
Row	**Slack or Surplus**	**Dual Price**
1	2700.000	0.0000000
2	0.0000000	1.000000
3	0.0000000	2.000000
4	-30.00000	-1.000000

この例では、どのようにして不可能な事態が発生したかを、双対価格が説明しています。例えば、第 2 行の双対価格の「＋1」は，第 2 行の右辺が 1 だけ増加するとき、不可能性が 1 減少することを示しています。
また、第 3 行の双対価格の 2 は、Cosmo をもう 1 台余分に生産する場合、不可能性が 2 減少することを示しています。なぜなら、Cosmo を 1 台生産するのには、2 人時必要だからです。そして、第 4 行の双対価格の-1 は、労働制約の右辺が 1 減少したとき、不可能性が 1 減少することを表わしています。図 1.8 はこの制約式を図式化した者です。

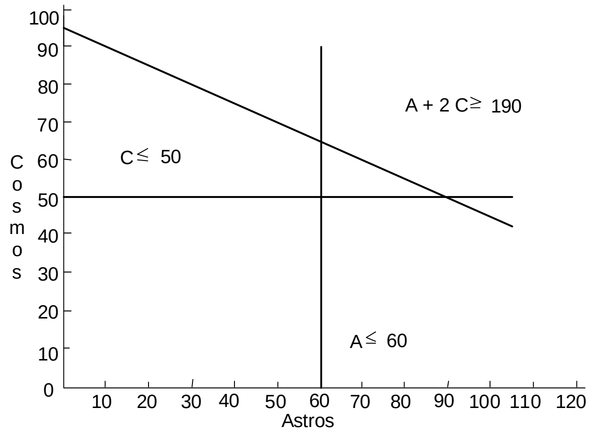

図 1.8 実行可能解のない例

1.8. 複数の最適解および退化

有界な最適解が得られるように定式化された線形計画法は、唯一の最適な目的関数の値をとります。しかし、同じ最適な目的関数の値をとる異った解を得ることがあります。例えば、 A の利益を 5 ドル/台減らすと、解は次のようになります。

```
MAX = 15 * A + 30 * C;
A <= 60;
C <= 50;
A + 2 * C <= 120;
Optimal solution found at step:          1
Objective value:                  1800.000
Variable          Value        Reduced Cost
       A       20.00000           0.0000000
       C       50.00000           0.0000000
     Row    Slack or Surplus     Dual Price
       1       1800.000            1.000000
       2       40.00000           0.0000000
       3      0.0000000           0.0000000
       4      0.0000000            15.00000
```

図 1.9 は、1500 ドルの等利益直線と実行可能領域を表しています。A＋2C=120 と 15A+30C=1500 の直線が平行であることに注意して下さい。A+2C=120 上の実行可能領域の点が最適解であることは明らかです。

特に注意深い読者は、次のことに気づくでしょう。A≦60 という第 2 行の制約では、スラック変数も双対価格も共にゼロです。これは, Astro の生産が、総利益に影響なく少量減少できることを示しています。もちろんこの場合、Astro の生産を減らした分、相殺する意味で、Cosmo の生産を増やす必要があります。そこで、次のように結論づける事ができます。

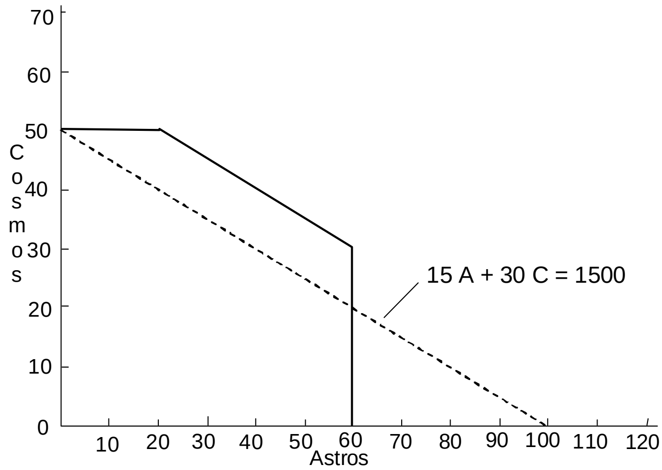

図 1.9 複数の最適解のあるモデル

Astro をもうすこし少なく生産し、Cosmo をもう少し多く生産するという、「代替的な最適解」が存在します。このことは、次のように Cosmo の利益率をほんの少し増してみればわかります。

```
MAX = 15.0001 * A + 30 * C;
A <= 60;
C <= 50;
A + 2 * C <= 120;
Optimal Solution found at step:          1
Objective value:                    1800.006
Variable              Value          Reduced Cost
        A            60.00000           0.0000000
        C            30.00000           0.0000000
      Row   Slack or Surplus           Dual Price
        1            1800.006             1.00000
        2           0.0000000       0.1000000E-03
        3            20.00000           0.0000000
        4           0.0000000            15.00000
```

予想通りに、利益は 1,800 ドルのままです・しかし、Cosmo の生産は 30 から 50 に増加し、Astro の生産は 60 から 20 に減少しています。

1.8.1. 蛇の目

一般的にいって、何れかの行で第 2 列および第 3 列の両方が 0 の場合にのみ、複数の最適解が存在します。これをある応用数学者は「ヘビの眼」と呼んでいます。言いかえれば、一個以上の最適解が存在するのは、どれかの変数がゼロの値をとりながら減少費用がゼロの値をとる場合、あるいは、どれかの制約においてそのスラック変数がゼロの値をとりながら、双対価格もゼロになる場合です。
数学的には、そのような解は、「退化」と呼ばれます。

したがって、代替的な最適解が存在する場合には、コンピュータの解と教科書の解が異なる場合があります。しかし、その場合でも目的関数の値は同じになるはずです。

図 1.9 の例では、2 つの最適解レポートはいわゆる基底変数 A と C の値と変数 A，C の制約式のスラック変数でのみ異なっています。双対変数のみが異なる複数の最適解がある場合もあります。
ET 社問題で Cosmo の生産能力を 30 にした例を考えてみましょう。定式化は次のとおりです。

```
MAX = 20 * A + 30 * C;
A < 60;
C < 30;
A + 2 * C < 120;
```

この問題のグラフを図 1.10 に示します。最適解は次のとおりです。

```
Optimal Solution found at step:          0
Objective value:                   2100.000
Variable             Value        Reduced Cost
       A          60.00000           0.0000000
       C          30.00000           0.0000000
     Row      Slack or Surplus      Dual Price
       1          2100.000            1.000000
       2         0.0000000            5.000000
       3         0.0000000           0.0000000
       4         0.0000000            15.00000
```

再び解に「ヘビの眼」が現れています。
すなわち、制約式の 3 番目にゼロのペアが現れています。これは Cosmo の生産能力を、目的関数の値を変えないで変更できることを意味します。図 1.10 はこの状況を説明しています。3 つの制約式が A=60，C=30 の点で交わります。制約式のどの 2 つの組もこの点で交わります。A+2C≦120 は冗長ですので、これを省いても実行可能領域は変りません。

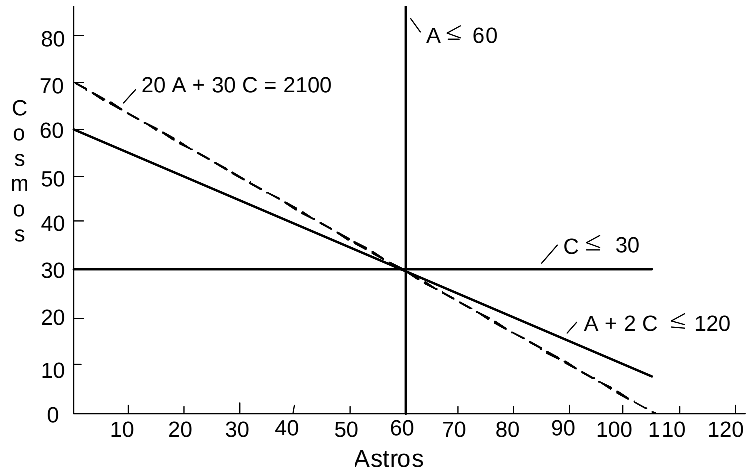

図 1.10 双対変数の代替解

もし制約式３の右辺定数項を少し減らすと次の解となります。

```
Optimal Solution found at step:         0
Objective value:                  2100.000
 Variable              Value        Reduced Cost
        A           60.00000         0.0000000
        C           30.00000         0.0000000
      Row     Slack or Surplus       Dual Price
        1           2100.000          1.000000
        2          0.0000000          20.00000
        3          0.0000000          30.00000
        4          0.0000000         0.0000000
```

この解は、前の解と双対変数の値でのみ異なっています。

以上をまとめれば、次のルールが成立します。もし解が「ヘビの眼」をもつなら、基底変数か双対変数のいずれかあるいは両方で異なる他の最適解の代替案を持ちます。

```
MAX = 20 * A;
A <= 60;
C =  30;
```

解 は次のとおりです。

```
Optimal Solution found at step:          0
Objective value:                   1200.000
 Variable            Value          Reduced Cost
        A         60.000000          0.0000000
        C         30.000000          0.0000000
      Row    Slack or Surplus        Dual Price
        1          1200.000           1.000000
        2         0.0000000           20.00000
        3         0.0000000          0.0000000
```

もし解に「ヘビの眼」があれば、自然な問いとして「最適解の代替案が基底変数か双対変数のいずれであるかを，出力結果のみから決めることができるだろうか」という疑問が残ります。

答は否です。次の２つの関連する問題を考えてみましょう。

問題 D	問題 P
MAX = X + Y;	MAX = X + Y;
X + Y + Z <= 1;	X + Y + Z <= 1;
X + 2 * Y <= 1;	X + 2 * Z <= 1;

両モデルとも次の複数の最適解をもっています。

解 1

問題 D				問題 P			
	OBJECTIVE VALUE				OBJECTIVE VALUE		
1)	1.000000			1)	1.000000		
Variable	Value		Reduced Cost	Variable	Value		Reduced Cost
X	1.000000		0 000000	X	1.000000		0.000000
Y	0.000000		0.000000	Y	0.000000		0.000000
Z	0.000000		1.000000	Z	0.000000		1.000000
Row	Slack	or	DuaL	Row	Slack	or	DuaL
	Surplus		Prices		Surplus		Prices
2)	0.000000		1.000000	2)	0.000000		1.000000
3)	0.000000		0.000000	3)	0.000000		0.000000

解 2

問題 D				問題 P			
	OBJECTIVE VALUE				OBJECTIVE VALUE		
1)	1.00000000			1)	1.00000000		
Variable	Value		Reduced Cost	Variable	Value		Reduced Cost
X	1.000000		0.000000	X	0.000000		0.000000
Y	0.000000		1.000000	Y	1.000000		0.000000
Z	0.000000		0.000000	Z	0.000000		1.000000
Row	Slack	or	DuaL	Row	Slack	or	DuaL
	Surplus		Prices		Surplus		Prices
2)	0.000000		0.000000	2)	0.000000		1.000000
3)	0.000000		1.000000	3)	1.000000		0.000000

上の解から次のことがわかります。

- 解 1 は，両方の問題とも同じ解になる。
- 問題 D は，双対変数が異なる複数の最適解をもつ。
- 問題 P は，基底変数が異なる複数の最適解をもつ。

以上のように、出力結果のみから代替案が基底変数あるいは双対変数のいずれで異なるかを決めることはできません。解 1 は制約式 3 の右辺定数と目的関数 X の係数を 1.001 のように少し大きくすると求めることができます。解 2 は，逆に 0.9999 のように少し小さくすると求めることができます。

研究者の中には，基底変数が異なる複数の最適解のことを「dual degenerate」と呼び、双対変数の場合を「primal degenerate」と呼んでいます。他の研究者は，基底変数に複数の最適解をもつ場合のみ、複数の最適解をもつ問題と定義しています。

1.8.2. 退化と冗長な制約式

2 次元で例を考えることは問題の見通しをよくしますが、時々この見通しは間違った結論を与えることがあります。2 次元において次のことは正しいと言えます。

2 次元において、n 個（n＞2）の不等式制約があり、すべてが 1 点で交わる場合、少なくとも（n-2）個の制約式は冗長である.

3 次元へこれを一般化しても正しくありません。実際、3 次元で n 個（n＞3）の不等式制約があり、すべてが 1 点で交わっている場合、それらのすべては必ずしも冗長ではありません。

すなわち，大きな問題で冗長な制約式があっても、必ずしも退化は起きません。これは次の制約式とそれを図化した図 1.11 を見れば明らかです。

$2x-y \leqq 1 \quad 2y-x \leqq 1 \quad 2z-x \leqq 1$

$2x-z \leqq 1 \quad 2y-z \leqq 1 \quad 2z-y \leqq 1$

これらの制約式は，点 x=y=z=1 で 6 面をもつ角錐の頂点になっています。この点は、3 個以上の制約式が交わっているので退化しています。しかし、いずれの制約式も冗長ではありません。点 x=0.6，y=0，z=0.5 は最初の制約式を満足していませんが、他のすべてを満足しているので最初の式は冗長ではありません。以下同様にして、0.6，0，0.5 の 6 個のすべての組合せを考えることで、6 個の制約式のいずれも冗長でないことがわかります。

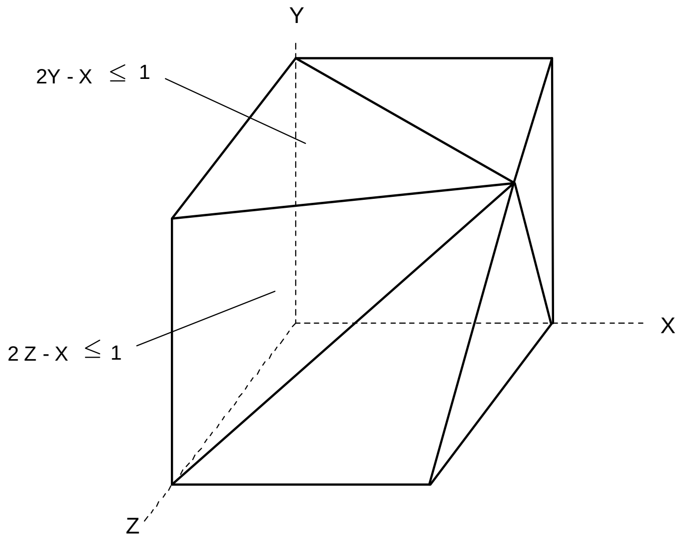

図 1.11 退化しているが冗長ではない例

1.9. 非線形モデルと大域的最適化

本書では、LP モデルを重要視しています。
歴史的に非線形モデルは、次の 2 つの理由で、できれば避けたいものです。

a)計算時間がかかる。

b)解が求まっても、局所最適解を約束するだけである。

より良い解が近くにないならば、解は局所最適解です。しかし、遠く離れてより良い解があるかもしれません。従来の非線形のソルバーは、近視の登山者のようなものです。彼らは最高峰でなく，最も近い峰の頂上に登頂します。決して、山系の最高峰に登頂した保証はありません。LINGO8 から、Global オプションを提供しました。このオプションを利用すれば、大域的最適解が保証されます。実例を示すため，次の問題を考えます。

```
Min = @sin(x) + .5*@abs(x-9.5);
      x <= 12;
```

図 1・12 は，これを図示したものです。

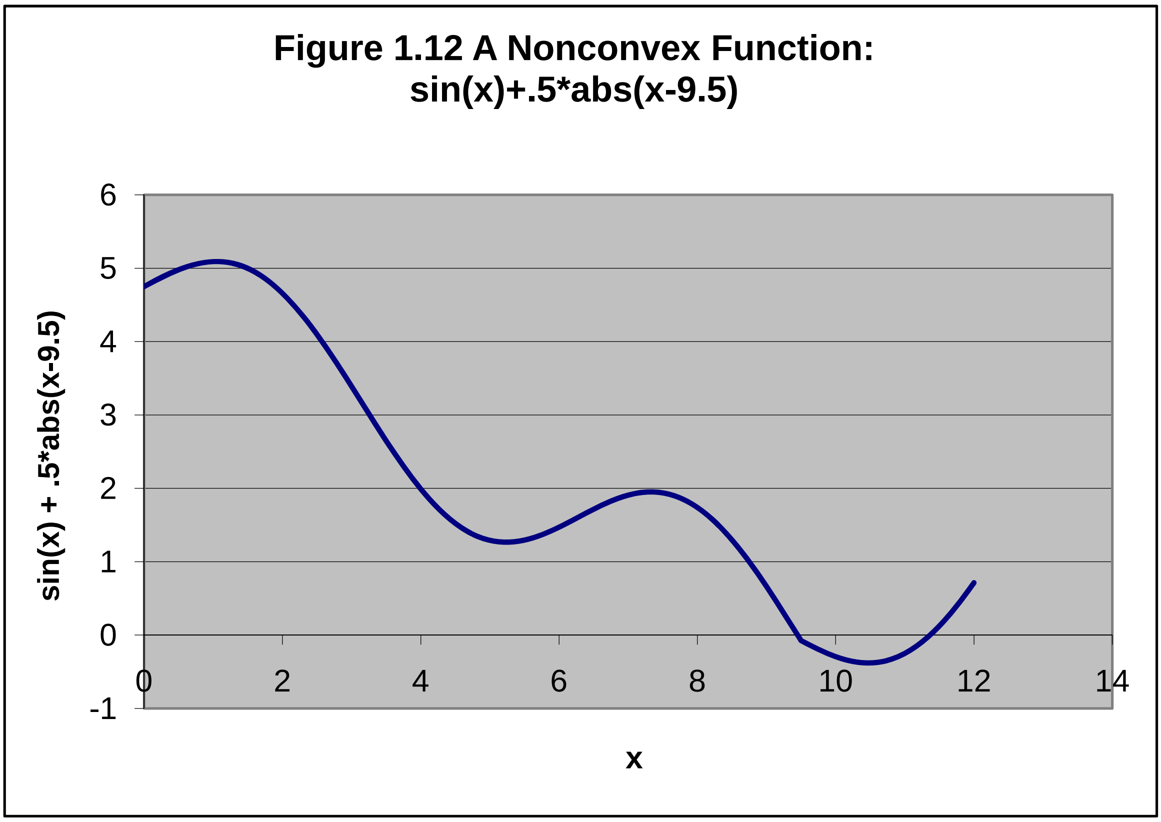

図 1.2 非凸関数（SIN(x)+0.5*abs(x-9.5)）

もし従来のソルバーでこのモデルを解くと、x = 0，x = 5.235987，x = 10.47197 の一つの解を求めます。もし Global オプションを指定すれば、解 x = 10.47197 が大域的最適解であることが報告されます。しかし、大域的最適解が早く求まっても、その検証に時間がかかる為、欠点(a)は改善できません。